Soluciones - Distribuciones binomial y normal

Curso: 2 Bachillerato Ciencias

Solución del ejercicio 1

Para que una tabla defina una distribución de probabilidad, todas las probabilidades deben estar entre 0 y 1 y sumar 1. La media es la suma de cada valor por su probabilidad, y la varianza se calcula con la media de los cuadrados menos el cuadrado de la media.

a. Todas las probabilidades están entre 0 y 1 y suman $0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}2 = 1$.
b. $P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6$.
c. $\mu = 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}4 + 3 \cdot 0{,}2 = 0{,}3 + 0{,}8 + 0{,}6 = 1{,}7$.
d. $\sum x_i^2 p_i = 0 + 0{,}3 + 1{,}6 + 1{,}8 = 3{,}7$; $\sigma^2 = 3{,}7 - 1{,}7^2 = 3{,}7 - 2{,}89 = 0{,}81$ y $\sigma = 0{,}9$.

Solución del ejercicio 2

La variable es la ganancia en una partida. Su esperanza indica lo que se gana o se pierde de media por partida a largo plazo; un juego es justo si la esperanza es cero, y así se calcula el premio que lo equilibra.

a. $X = 5$ con probabilidad $\frac{1}{6}$; $X = 1$ con $\frac{2}{6}$; $X = -2$ con $\frac{3}{6}$.
b. $E(X) = 5 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{2}{6} - 2 \cdot \frac{3}{6} = \frac{5+2-6}{6} = \frac{1}{6} \approx 0{,}17$ €.
c. No es justo: la esperanza es positiva, así que favorece al jugador, que gana unos 17 céntimos por partida a largo plazo.
d. $\frac{g}{6} + \frac{2}{6} - 1 = 0$, $g = 4$ €.

Solución del ejercicio 3

Para usar la fórmula de la binomial se identifican el número de pruebas y la probabilidad de éxito, y se calcula el número combinatorio. Las probabilidades acumuladas se obtienen sumando términos o usando el suceso contrario.

a. $\binom{5}{2} \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^3 = 10 \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}343 = 0{,}3087$.
b. $P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}7^5 + 5 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^4 = 0{,}1681 + 0{,}3601 = 0{,}5282$.
c. $1 - P(X \leq 1) = 1 - 0{,}5282 = 0{,}4718$.
d. $\mu = 5 \cdot 0{,}3 = 1{,}5$ y $\sigma = \sqrt{5 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7} = \sqrt{1{,}05} \approx 1{,}02$.

Solución del ejercicio 4

Antes de calcular hay que justificar que se cumplen las condiciones de la binomial: número fijo de pruebas, dos resultados posibles, probabilidad constante e

independencia. Para «al menos uno» se resta de 1 la probabilidad de ninguno.

a. Cada envase es una prueba con dos resultados, la probabilidad de defecto es constante y las pruebas son independientes: $X \sim B(10;\ 0{,}1)$.
b. $0{,}9^{10} \approx 0{,}3487$.
c. $1 - 0{,}9^{10} \approx 0{,}6513$.
d. $\binom{10}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^8 = 45 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}4305 \approx 0{,}1937$.

Solución del ejercicio 5

La tabla de la normal tipificada solo recoge probabilidades acumuladas para valores positivos. Para las demás se usan la simetría de la campana respecto de cero y el complementario; en el problema inverso se busca la probabilidad dentro de la tabla.

a. En la tabla, $0{,}8944$.
b. $1 - P(Z \leq 0{,}6) = 1 - 0{,}7257 = 0{,}2743$.
c. $P(Z$.
d. Se busca 0,975 dentro de la tabla: $k = 1{,}96$.

Solución del ejercicio 6

Para cualquier normal se tipifica restando la media y dividiendo entre la desviación típica, y después se usa la tabla. Conviene dibujar la campana y sombrear la zona pedida para decidir si hay que restar o usar la simetría.

a. $Z = \frac{62-50}{8} = 1{,}5$: $P(Z$.
b. $Z = \frac{40-50}{8} = -1{,}25$: $P(Z > -1{,}25) = P(Z$.
c. Z entre $-0{,}5$ y 1: $0{,}8413 - (1 - 0{,}6915) = 0{,}5328$.
d. $2 \cdot (1 - P(Z$, un 4,56 %.

Solución del ejercicio 7

En el problema inverso se conoce la probabilidad y se busca el valor. Se localiza en el interior de la tabla el valor de z correspondiente y se deshace la tipificación multiplicando por la desviación típica y sumando la media.

a. $P(Z \leq z) = 0{,}9$ da $z \approx 1{,}28$. $a = 176 + 1{,}28 \cdot 7 = 184{,}96$ cm.
b. $P(Z \leq z) = 0{,}25$: por simetría, $z \approx -0{,}67$. $a = 176 - 0{,}67 \cdot 7 = 171{,}31$ cm.
c. $P(-z$ da $z = 1{,}96$: $176 \pm 1{,}96 \cdot 7$, es decir, entre $162{,}28$ y $189{,}72$ cm.

Solución del ejercicio 8

Cada tiro libre es una prueba independiente con la misma probabilidad de acierto, así que el número de canastas es binomial. Las probabilidades se calculan con la fórmula, sumando los casos necesarios para «al menos».

a. $X \sim B(8;\, 0{,}75)$, con media $8 \cdot 0{,}75 = 6$ canastas.
b. $0{,}75^8 \approx 0{,}1001$.
c. $P(6) + P(7) + P(8) = 0{,}3115 + 0{,}2670 + 0{,}1001 \approx 0{,}6785$.
d. Comparando valores, el máximo es $P(X = 6) \approx 0{,}3115$: 6 canastas, igual que la media.

Solución del ejercicio 9

El número de semillas que germinan es binomial. La media y la desviación típica se calculan con sus fórmulas, y una probabilidad muy pequeña de obtener el resultado observado es un indicio de que el dato del fabricante no es cierto.

a. $\mu = 20 \cdot 0{,}9 = 18$ y $\sigma = \sqrt{20 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1} = \sqrt{1{,}8} \approx 1{,}34$.
b. $0{,}9^{20} \approx 0{,}1216$.
c. $P(18) + P(19) + P(20) \approx 0{,}2852 + 0{,}2702 + 0{,}1216 \approx 0{,}6769$.
d. $P(X \leq 14) \approx 0{,}0113$, apenas un 1 %: es muy improbable si la garantía fuera cierta, así que tiene motivos para reclamar.

Solución del ejercicio 10

El peso es una variable continua normal, así que se tipifica cada valor y se usa la tabla. Para pasar de probabilidad a número de barras se multiplica por el total, y el percentil se obtiene con el problema inverso.

a. $Z = \frac{235-250}{10} = -1{,}5$: $1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$, un 6,68 %.
b. Z entre -1 y 1: $2 \cdot 0{,}8413 - 1 = 0{,}6826$, un 68,26 %.
c. $P(X > 270) = P(Z > 2) = 0{,}0228$; $300 \cdot 0{,}0228 \approx 6{,}8$, unas 7 barras.
d. $z \approx 1{,}645$: $250 + 1{,}645 \cdot 10 \approx 266{,}45$ g.

Solución del ejercicio 11

Las notas siguen una normal y cada pregunta se responde tipificando. La nota de corte es un problema inverso: se busca el valor de z que deja por encima la proporción pedida y se deshace la tipificación.

a. $Z = \frac{5-6{,}5}{1{,}5} = -1$: $P(Z \geq -1) = 0{,}8413$, un 84,13 %.
b. $Z = \frac{9-6{,}5}{1{,}5} \approx 1{,}67$: $1 - 0{,}9525 = 0{,}0475$, un 4,75 %.
c. $P(Z \leq z) = 0{,}85$ da $z \approx 1{,}04$: $6{,}5 + 1{,}04 \cdot 1{,}5 = 8{,}06$.
d. Z entre $-0{,}33$ y 1: $0{,}8413 - (1 - 0{,}6293) = 0{,}4706$; $12\,000 \cdot 0{,}4706 \approx 5647$ estudiantes.

Solución del ejercicio 12

El trayecto es una variable normal. Llegar tarde significa tardar más que el tiempo disponible; para fijar la hora de salida se resuelve un problema inverso con la

probabilidad de llegar a tiempo exigida.

a. Dispone de 40 min: $P(X > 40) = P(Z > 1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$.
b. $P(Z \leq z) = 0{,}99$ da $z \approx 2{,}33$: $35 + 2{,}33 \cdot 5 = 46{,}65$ min. Debe salir hacia las 8:13.
c. $20 \cdot 0{,}1587 \approx 3{,}2$: unos 3 días.

Solución del ejercicio 13

La regla empírica da los porcentajes aproximados de datos a una, dos y tres desviaciones típicas de la media. Para decidir si un dato es excepcional se tipifica y se mira a cuántas desviaciones típicas está.

a. $6 \pm 0{,}5$: entre 5,5 y 6,5 minutos.
b. 6 ± 1: entre 5 y 7 minutos.
c. Fuera del 95 % queda un 5 %, la mitad por cada lado: un 2,5 % (con la tabla, $1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$).
d. $Z = \frac{4{,}4-6}{0{,}5} = -3{,}2$: está a más de tres desviaciones típicas. Solo lo consigue alrededor de 1 de cada 1 000 socios: es excepcional.

Solución del ejercicio 14

La vida útil de las baterías es normal. El porcentaje que se cambia es la probabilidad de durar menos que la garantía, y la garantía que corresponde a un porcentaje dado se obtiene con el problema inverso.

a. $Z = \frac{700-800}{50} = -2$: $1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$, un 2,28 %.
b. $50\,000 \cdot 0{,}0228 = 1140$ baterías.
c. $z \approx -2{,}33$: $800 - 2{,}33 \cdot 50 = 683{,}5$ días; unos 683 días.
d. $P(Z > 2) = 0{,}0228$, por simetría con el apartado a).

Solución del ejercicio 15

Con muchas pruebas la binomial se aproxima por una normal con la misma media y desviación típica. Como la binomial solo toma valores enteros, se aplica la corrección de continuidad ampliando cada valor medio punto a cada lado.

a. $X \sim B(400;\, 0{,}05)$: $\mu = 20$ y $\sigma = \sqrt{400 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95} = \sqrt{19} \approx 4{,}36$.
b. $np = 20 > 5$ y $n(1-p) = 380 > 5$.
c. $P(X > 25) = P(X \geq 26) \approx P(Y > 25{,}5)$ con $Y \sim N(20;\, 4{,}36)$. $Z = \frac{5{,}5}{4{,}36} \approx 1{,}26$: $1 - 0{,}8962 = 0{,}1038$.
d. $P(14{,}5$: Z entre $-1{,}26$ y $1{,}26$, $2 \cdot 0{,}8962 - 1 = 0{,}7924$.
e. La binomial toma valores enteros y la normal es continua: cada entero k se representa por el intervalo $(k - 0{,}5;\, k + 0{,}5)$.

Solución del ejercicio 16

El número de pasajeros que se presentan es binomial con muchas pruebas, por lo que se aproxima por una normal. Cada pregunta se traduce primero a valores enteros y después se aplica la corrección de continuidad.

a. $X \sim B(210;\, 0{,}92)$: $\mu = 193{,}2$ y $\sigma = \sqrt{210 \cdot 0{,}92 \cdot 0{,}08} \approx 3{,}93$.
b. $np = 193{,}2 > 5$ y $n(1-p) = 16{,}8 > 5$.
c. $P(X \geq 201) \approx P(Y > 200{,}5)$: $Z = \frac{7{,}3}{3{,}93} \approx 1{,}86$, $1 - 0{,}9686 = 0{,}0314$.
d. Más de 15 vacíos: $X \leq 184$, $P(Y$, $Z = \frac{184{,}5 - 193{,}2}{3{,}93} \approx -2{,}21$: $1 - 0{,}9864 = 0{,}0136$.
e. Solo en unos 3 vuelos de cada 100 tendrá que indemnizar, y casi siempre llenará el avión mejor que sin sobreventa: es un riesgo calculado.

Solución del ejercicio 17

Contestar al azar convierte cada pregunta en una prueba con probabilidad un cuarto de acierto. La binomial se aproxima por la normal, y para fijar el número de aciertos exigido se resuelve un problema inverso.

a. $X \sim B(50;\, 0{,}25)$, $\mu = 12{,}5$, $\sigma = \sqrt{9{,}375} \approx 3{,}06$.
b. $P(X \geq 20) \approx P(Y > 19{,}5)$: $Z = \frac{7}{3{,}06} \approx 2{,}29$, $1 - 0{,}9890 = 0{,}0110$.
c. Se esperan 12,5 aciertos. El 95 % estará en $12{,}5 \pm 1{,}96 \cdot 3{,}06$, es decir, entre unos 6,5 y 18,5 aciertos.
d. No: la probabilidad es de un 1,1 %, más del 0,1 %. Haría falta $z \approx 3{,}09$, es decir, $Y > 12{,}5 + 3{,}09 \cdot 3{,}06 \approx 22{,}0$: unos 22 aciertos.

Solución del ejercicio 18

Se tipifican los dos límites de tolerancia para calcular la proporción aceptada. Para hallar la desviación típica necesaria se usa que el intervalo simétrico del 95 % corresponde a z igual a 1,96.

a. $Z = \pm\frac{0{,}5}{0{,}3} \approx \pm 1{,}67$: $2 \cdot (1 - 0{,}9525) = 0{,}0950$, un 9,50 %.
b. $\frac{0{,}5}{\sigma} = 1{,}96$, $\sigma = \frac{0{,}5}{1{,}96} \approx 0{,}255$ cm.
c. $Z_1 = \frac{49{,}5 - 50{,}2}{0{,}3} \approx -2{,}33$ y $Z_2 = \frac{50{,}5 - 50{,}2}{0{,}3} = 1$. Aceptadas: $0{,}8413 - (1 - 0{,}9901) = 0{,}8314$. Se rechaza un 16,86 %.
d. Una media desplazada aumenta mucho los rechazos por un lado aunque la dispersión no cambie; y una dispersión grande produce rechazos por los dos lados.

Solución del ejercicio 19

Para comparar resultados de poblaciones con distinta media y dispersión se tipifican los datos. La nota tipificada indica a cuántas desviaciones típicas de su media está

cada alumno, y permite compararlos de forma justa.

a. Lucía: $\frac{8-6}{1{,}2} \approx 1{,}67$. Pablo: $\frac{8{,}5-5}{2} = 1{,}75$.
b. Pablo, porque su nota está más desviaciones típicas por encima de la media de su grupo.
c. Lucía: $1 - 0{,}9525 = 0{,}0475$; Pablo: $1 - 0{,}9599 = 0{,}0401$.
d. $5 + 1{,}67 \cdot 2 = 8{,}34$.

Solución del ejercicio 20

Cada dato del enunciado da un valor de z en la tabla. Al deshacer la tipificación se obtienen dos ecuaciones lineales con la media y la desviación típica como incógnitas, que se resuelven como un sistema.

a. *P\left(Z* y $P\left(Z > \frac{90-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}0228$.
b. $1 - 0{,}1587 = 0{,}8413$ corresponde a $z = 1$, luego $\frac{60-\mu}{\sigma} = -1$. $1 - 0{,}0228 = 0{,}9772$ corresponde a $z = 2$, luego $\frac{90-\mu}{\sigma} = 2$.
c. $\mu - \sigma = 60$ y $\mu + 2\sigma = 90$. Restando, $3\sigma = 30$: $\sigma = 10$ y $\mu = 70$ minutos.
d. Z entre -1 y 1: $2 \cdot 0{,}8413 - 1 = 0{,}6826$, un 68,26 %.