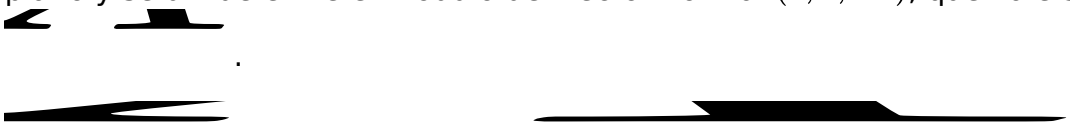
Soluciones del examen - Distancias, ángulos y áreas

Curso: 2 Bachillerato Ciencias · Duración: 60 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (4 puntos)

a. $d(P,\pi)=\dfrac{|2+2+2+4|}{\sqrt{1+4+4}}=\dfrac{10}{3}\approx 3{,}33$. Se sustituye el punto en la ecuación del plano y se divide entre el módulo del vector normal $(1,2,-2)$, que vale 3.

b. 

, de módulo $\sqrt{38}$. $d=\dfrac{\sqrt{38}}{\sqrt{3}}\approx 3{,}56$. Se toma el punto $A(0,1,2)$ de la recta y su vector director $\vec{u}=(1,-1,1)$. La distancia es el área del paralelogramo dividida entre su base: .

c. Punto de r: $(t,\,1-t,\,2+t)$. $\dfrac{|t+2-2t-4-2t+4|}{3}=\dfrac{|2-3t|}{3}=3$: $2-3t=\pm 9$, $t=-\frac{7}{3}$ o $t=\frac{11}{3}$. Puntos $\left(-\frac{7}{3},\frac{10}{3},-\frac{1}{3}\right)$ y $\left(\frac{11}{3},-\frac{8}{3},\frac{17}{3}\right)$. Hay dos soluciones porque los puntos pueden estar a uno y otro lado del plano. Comprobación con $t=-\frac{7}{3}$: $\frac{|2+7|}{3}=3$.

Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

a. $\vec{u}=(2,1,-1)$, $\vec{n}_1=(1,-1,1)$. $\sin\alpha=\dfrac{|2-1-1|}{\sqrt{6}\sqrt{3}}=0$: $\alpha=0^\circ$, la recta es paralela a π_1 (o está contenida en él: su punto $(1,0,-1)$ cumple $1-0-1=0$, así que está contenida). Para el ángulo entre recta y plano se usa el seno, porque el vector normal es perpendicular al plano.

b. $\cos\beta=\dfrac{|2-1+1|}{\sqrt{3}\sqrt{6}}=\dfrac{2}{\sqrt{18}}\approx 0{,}4714$, $\beta\approx 61{,}9^\circ$. El ángulo entre dos planos es el que forman sus vectores normales, $(1,-1,1)$ y $(2,1,1)$. (1,5 puntos)

c. Paralela si $(1,m,2)\cdot(2,1,1)=0$: $2+m+2=0$, $m=-4$. Una recta es paralela a un plano cuando su vector director es perpendicular al normal del plano. (1 punto)

Solución del ejercicio 3 (4 puntos)

a. Recta perpendicular por P: $(1+t,\ 3-t,\ 2+2t)$. Se sustituye en π: $(1+t)-(3-t)+2(2+2t)=6$, es decir, $2+6t=6$ y $t=\frac{2}{3}$. Entonces $H=\left(\frac{5}{3},\frac{7}{3},\frac{10}{3}\right)$. H es el pie de la perpendicular trazada desde P. Comprobación: $\frac{5}{3}-\frac{7}{3}+\frac{20}{3}=\frac{18}{3}=6$. (2 puntos)

b. $P'=2H-P=\left(\frac{10}{3}-1,\ \frac{14}{3}-3,\ \frac{20}{3}-2\right)=\left(\frac{7}{3},\frac{5}{3},\frac{14}{3}\right)$. H es el punto medio del segmento PP'.

c. Fórmula: $d=\dfrac{|1-3+4-6|}{\sqrt{6}}=\dfrac{4}{\sqrt{6}}\approx 1{,}63$. Con H: [redacted]. Coinciden. Que las dos formas coincidan sirve de control del apartado a). (1 punto)

Solución del ejercicio 4 (4 puntos)

a. $\vec{u}=(1,1,0)$ y $\vec{v}=(0,1,-1)$ no son proporcionales. [redacted] y [redacted]: se cruzan. Dos rectas se cruzan si no son paralelas y no se cortan: vectores directores no proporcionales y producto mixto no nulo. (1,5 puntos)

b. $\vec{u}\times\vec{v}=(1\cdot(-1)-0\cdot 1,\ 0\cdot 0-1\cdot(-1),\ 1\cdot 1-1\cdot 0)=(-1,1,1)$, de módulo $\sqrt{3}$. $d=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\approx 0{,}58$. Fórmula: [redacted], con $P(0,0,1)$ y $Q(1,0,3)$. (1,5 puntos)

c. $\cos\alpha=\dfrac{|0+1+0|}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$, $\alpha=60^\circ$. El ángulo de dos rectas se calcula con los vectores directores y valor absoluto, para quedarse con el ángulo agudo. (1 punto)

Solución del ejercicio 5 (4 puntos)

a. [redacted]. $V=\frac{240}{6}=40$ dm³, es decir, 40 litros.

El volumen del tetraedro es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto de tres aristas que salen de A. (1 punto)

b. [redacted], [redacted].

[redacted], de módulo $\sqrt{1\,600+900+400}=\sqrt{2\,900}$. Área $=\frac{\sqrt{2\,900}}{2}\approx 26{,}93$ dm². La cara BCD mide la mitad del módulo de ese producto vectorial; además $\sqrt{2\,900}=10\sqrt{29}\approx 53{,}85$. (1,5 puntos)

c. $h=\dfrac{3V}{\text{área}}=\dfrac{120}{26{,}93}\approx 4{,}46$ dm. También con el plano BCD: $4x+3y+2z-24=0$ y $d(A)=\dfrac{24}{\sqrt{29}}\approx 4{,}46$ dm. La normal del plano BCD es $(40,30,20)$, proporcional a $(4,3,2)$, y el plano pasa por $B(6,0,0)$: $24-24=0$. (1,5 puntos)