Apuntes - Distancias, ángulos y áreas

Curso: 2 Bachillerato Ciencias

Actividad de introducción: ¿a qué distancia está el dron?

Un dron de vigilancia forestal vuela sobre una ladera. El piloto lee en la pantalla su altura sobre el nivel del mar, pero lo que le importa para no chocar es la distancia al terreno. Si la ladera fuera horizontal, bastaría con restar alturas; pero en una pendiente la distancia más corta al suelo no es la vertical, sino la perpendicular a la ladera. Piensa antes de empezar: ¿cómo medirías la distancia entre dos tuberías que pasan una por encima de otra sin tocarse? ¿Cuánto debe medir una rampa para que su pendiente sea cómoda para una silla de ruedas? ¿Dónde hay que apuntar un foco para que la luz rebote en un espejo y llegue a un actor? Todas estas preguntas se responden con las herramientas de este tema: distancias entre puntos, rectas y planos, ángulos y proyecciones. Son las preguntas finales de casi todos los ejercicios de geometría de la PAU, y se resuelven combinando lo que ya sabes de vectores, rectas y planos.

Distancia entre dos puntos y punto medio

Definición: distancia entre dos puntos y punto medio

La distancia entre $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ es [redacted]. El punto medio es $M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$. El **plano mediador** de AB es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de A y B: pasa por M y tiene a [redacted] como normal.

Ángulos

Propiedades: ángulos

- **Entre dos rectas** de directores $\vec{u}, \vec{v}$: $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$ (ángulo agudo, entre 0° y 90°).
- **Entre dos planos** de normales $\vec{n}_1, \vec{n}_2$: $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$.
- **Entre recta y plano**: $\sin\alpha = \dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{u}|}{|\vec{n}||\vec{u}|}$ (con seno, porque el ángulo es el complementario del que forma $\vec{u}$ con la normal).

Distancias

Propiedades: distancias

- **Punto a plano:** $d(P,\pi) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.
- **Punto a recta** $r:(A,\vec{u})$: .
- **Entre planos paralelos:** la distancia de un punto de uno al otro.
- **Recta paralela a un plano:** la distancia de un punto de la recta al plano.
- **Entre rectas paralelas:** la distancia de un punto de una a la otra.
- **Entre rectas que se cruzan** $r:(P,\vec{u})$ y $s:(Q,\vec{v})$:

  (volumen del paralelepípedo entre el área de la base).

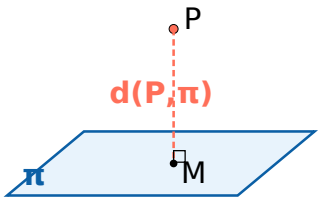


Figura: la distancia de P a π es la longitud del segmento PM, perpendicular al plano.

Ejemplo 1

$d(P,\pi)$ con $P(1,2,-1)$ y $\pi: 2x-y+2z+3=0$: $\dfrac{|2-2-2+3|}{\sqrt{4+1+4}} = \dfrac{1}{3}$.

Proyecciones y simétricos

Definición: proyecciones y simétricos

La **proyección ortogonal** de un punto P sobre un plano π es el punto M donde la recta por P perpendicular a π lo corta; el **simétrico** es $P' = 2M - P$ (M es el punto medio de PP'). Para una recta r: se halla el plano por P perpendicular a r; su corte con r es M, y de nuevo $P' = 2M - P$.

Ejemplo 2

Simétrico de $P(1,2,3)$ respecto de $\pi: x+y+z=3$. Recta por P perpendicular: $(1+t, 2+t, 3+t)$. Corte: $6+3t=3 \Rightarrow t=-1$, $M=(0,1,2)$.
$P' = 2M - P = (-1,0,1)$.

Áreas y volúmenes

Propiedades: áreas y volúmenes

- Área del triángulo ABC: $\frac{\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|}{2}$; del paralelogramo, el módulo completo.
- Volumen del paralelepípedo: $\left|\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\right|$; del tetraedro, un sexto.
- Altura de un tetraedro desde D: $h=\frac{3V}{\text{área de } ABC}$, o la distancia de D al plano ABC.

Errores frecuentes

¡Atención!

- Usar coseno en el ángulo recta-plano: es seno.
- Olvidar el valor absoluto en el ángulo y en la distancia a un plano.
- Calcular el simétrico olvidando duplicar: $P'=2M-P$, no M.
- Aplicar la fórmula de rectas que se cruzan a rectas paralelas (el denominador sería 0).

Más ejemplos resueltos

Ejemplo 3

$d(P,r)$ con $P(1,1,1)$ y $r:(0,0,0)+\lambda(1,2,2)$. $\vec{u}\times\overrightarrow{AP}=(-2,2,-1)$, módulo $\sqrt{2}$; $|\vec{u}|=3$. $d=\frac{\sqrt{2}}{3}\approx 0{,}47$.

Ejemplo 4

Para $r:(1,0,1)+\lambda(1,2,-1)$ y $\pi:2x-y+z-4=0$: $\operatorname{sin}\alpha=\frac{|2-2-1|}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\frac{1}{6}$, luego $\alpha\approx 9{,}6^\circ$.

Ejemplo 5

$r:(1,0,0)+\lambda(1,1,2)$ y $s:(0,1,1)+\mu(2,0,-1)$. $\vec{u}\times\vec{v}=(-1,5,-2)$, con módulo $\sqrt{30}$. $\overrightarrow{AB}=(-1,1,1)$. $d=\frac{4}{\sqrt{30}}\approx 0{,}73$.

En la PAU estos cálculos suelen enlazarse con los del tema anterior: primero se estudia la posición relativa y después, según el caso, se pide la distancia correspondiente. Practica el método completo en los ejercicios.

Un problema completo estilo PAU

Observación

Enunciado. Se consideran las rectas $r: (1,0,0)+\lambda(1,1,2)$ y $s: (0,1,1)+\mu(2,0,1)$. (a) Prueba que se cortan y halla el punto C de corte. (b) Halla la ecuación del plano π que las contiene. (c) Calcula la distancia del origen a π. (d) Calcula el área del triángulo de vértices $A(1,0,0)\in r$, $B(0,1,1)\in s$ y C.

Resolución. (a) Las direcciones $(1,1,2)$ y $(2,0,1)$ no son proporcionales y [redacted], luego se cortan. Igualando coordenadas se obtiene $\lambda=\mu=1$ y $C(2,1,2)$.

(b) $\vec{n}=(1,1,2)\times(2,0,1)=(1,3,-2)$. Con $A(1,0,0)$: $x+3y-2z-1=0$. Comprobación: B da $0+3-2-1=0$ y C da $2+3-4-1=0$.

(c) $d(O,\pi)=\dfrac{|-1|}{\sqrt{1+9+4}}=\dfrac{1}{\sqrt{14}}\approx 0{,}27$.

(d) [redacted] y [redacted], de módulo $\sqrt{14}$. Área $=\dfrac{\sqrt{14}}{2}\approx 1{,}87$ u². Observa que el vector del producto vectorial coincide con la normal del plano hallada en (b): es una buena comprobación.

Método: simétrico de un punto respecto de un plano

1. Escribe la recta por P con director la normal del plano.
2. Halla el punto M de corte con el plano.
3. Calcula $P'=2M-P$.
4. Comprueba que M es el punto medio de PP'.

Estrategias para los problemas métricos

Método: elegir la fórmula de distancia adecuada

1. Punto y plano: aplica directamente la fórmula con el valor absoluto del numerador y la raíz del módulo de la normal.
2. Punto y recta: usa el producto vectorial [redacted], o halla el pie de la perpendicular si también se pide el punto más cercano.

3. Dos planos paralelos o una recta paralela a un plano: toma un punto de uno de ellos y calcula su distancia al otro.
4. Dos rectas paralelas: es la distancia de un punto de una de ellas a la otra.
5. Dos rectas que se cruzan: usa el producto mixto dividido entre el módulo del producto vectorial, o la perpendicular común si piden los puntos más próximos.
6. Si los elementos se cortan, la distancia es cero: compruébalo antes de aplicar ninguna fórmula.

Ejemplo 6

Una antena está en $A(5,0,0)$ y una carretera sigue la recta $t(4,3,0)$ (km). ¿A qué distancia está la antena?

El producto vectorial del vector que va del origen a la antena por el vector director es $(0,0,15)$, de módulo 15, y el vector director mide 5. La distancia es $15/5 = 3$ km. El punto más cercano de la carretera se halla imponiendo que el vector que lo une con la antena sea perpendicular a la carretera: se obtiene $t = 0{,}8$, es decir, el punto $(3{,}2;\ 2{,}4;\ 0)$. Con el teorema de Pitágoras se puede calcular después qué tramo de la carretera queda a menos de cierta distancia de la antena.

Ejemplo 7

¿Qué ángulo forma con el suelo una rampa que sube 0,5 m en 6 m de recorrido horizontal?

El vector normal a la rampa es $(1,0,-12)$, y el ángulo entre la rampa y el suelo es el que forman sus normales: el coseno vale $12/\sqrt{145}$, que corresponde a unos 4,76 grados. En la práctica se suele dar la pendiente en tanto por ciento, que es la tangente de ese ángulo multiplicada por 100: aquí $0{,}5/6$, un 8,33 %.

¡Atención!

En la fórmula de la distancia de un punto a un plano no olvides el valor absoluto ni el término independiente D, que debe estar en el mismo miembro que el resto. Para el ángulo entre una recta y un plano se usa el seno, no el coseno, porque el vector que se conoce es el normal. Y al calcular el simétrico de un punto, recuerda que el pie de la perpendicular es el punto medio: el simétrico es $2H - P$, no H. Muchos alumnos pierden puntos en la PAU por dar como respuesta la proyección cuando se pedía el simétrico, o al revés.

Áreas, volúmenes y lugares geométricos

Propiedad: fórmulas de áreas y volúmenes con vectores

El área de un paralelogramo de lados $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es $|\vec{u} \times \vec{v}|$ y la del triángulo es la mitad. El volumen de un paralelepípedo es el valor absoluto del producto mixto y el de un

tetraedro es la sexta parte. Con estas dos fórmulas se pueden calcular alturas sin hallar proyecciones: la altura de un triángulo sobre un lado es el doble del área dividido entre ese lado, y la altura de un tetraedro sobre una cara es el triple del volumen dividido entre el área de esa cara. Además, un lugar geométrico, como el plano mediador de un segmento o los planos bisectores de dos planos, se obtiene escribiendo la condición de igualdad de distancias para un punto genérico (x, y, z) y simplificando.

Ejemplo 8

Halla la altura del tetraedro $A(0,0,0)$, $B(6,0,0)$, $C(0,8,0)$, $D(2,2,5)$ sobre la cara BCD.

El volumen es la sexta parte del producto mixto, $240/6 = 40$. El área de la cara BCD es la mitad del módulo de $(40, 30, 20)$, unos 26,93. La altura vale el triple del volumen dividido entre esa área, aproximadamente 4,46. Se obtiene lo mismo calculando la distancia de A al plano $4x + 3y + 2z - 24 = 0$.

Observación: medir la Tierra con geometría

Los topógrafos que miden fincas, carreteras o túneles usan hoy receptores de GPS que dan las tres coordenadas de cada punto con precisión de centímetros. A partir de esas coordenadas, el programa calcula superficies, pendientes y volúmenes de tierra con las fórmulas de este tema. Hace más de dos mil años, Eratóstenes ya midió el tamaño de la Tierra comparando el ángulo de los rayos del Sol en dos ciudades de Egipto, y en el siglo XVIII una expedición con científicos españoles midió un arco de meridiano en Perú para comprobar que la Tierra está achatada por los polos.

El consejo de Otto

Cualquier distancia se reduce a una proyección ortogonal: si te atascas, halla el pie de la perpendicular y calcula la longitud del segmento. Así tendrás un método de comprobación.