Ejercicios - Distancias, ángulos y áreas

Curso: 2 Bachillerato Ciencias · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Distancias entre puntos

La distancia entre dos puntos es el módulo del vector que los une: . Se consideran $A(2,1,0)$, $B(4,3,1)$ y $C(0,3,1)$.

a. Calcula las longitudes de los lados del triángulo ABC y clasifícalo.
b. Halla el punto medio M del lado BC.
c. Calcula la longitud de la mediana AM. ¿Por qué es también la altura?
d. Calcula el área del triángulo con base y altura.

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Ángulo entre dos rectas

El ángulo entre dos rectas es el ángulo agudo entre sus vectores directores: $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$. Se consideran las rectas r, s y t con vectores directores $\vec{u} = (1,2,2)$, $\vec{v} = (2,-1,2)$ y $\vec{w} = (2,1,-2)$.

a. Calcula el ángulo entre r y s.
b. Comprueba que r y t son perpendiculares.
c. Calcula el ángulo entre s y t.
d. ¿Por qué se toma el valor absoluto del producto escalar?

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Ángulos con planos

El ángulo entre una recta y un plano cumple $\sin\alpha = \dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|}$, y el ángulo entre dos planos es el de sus vectores normales.

a. Calcula el ángulo entre la recta de vector director $(1,1,0)$ y el plano $x+z=3$.
b. Comprueba que los planos $x+y+z=1$ y $x-y=0$ son perpendiculares.
c. Calcula el ángulo entre los planos $x+y+z=1$ y $2x+y-z=4$.
d. ¿Por qué en el ángulo recta-plano aparece un seno y no un coseno?

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Distancia de un punto a un plano

La distancia de $P(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ es $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Se considera el plano $\pi:\ 2x - y + 2z - 3 = 0$.

a. Calcula la distancia de $P(3, -1, 2)$ a π.
b. Calcula la distancia entre π y el plano paralelo $\pi':\ 2x - y + 2z + 6 = 0$.
c. Halla los planos paralelos a π que están a distancia 2 de él.

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Distancia de un punto a una recta

La distancia de un punto P a una recta que pasa por A con vector $\vec{u}$ es .

Se consideran $P(1, 2, 3)$ y $r:\ (x, y, z) = (1, 0, 0) + t(1, 1, 0)$.

a. Calcula la distancia con la fórmula.
b. Halla el punto H de r más cercano a P (pie de la perpendicular).
c. Comprueba que coincide con la distancia.

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Distancia entre dos rectas que se cruzan

Si dos rectas se cruzan, su distancia es : la altura del paralelepípedo

sobre la base que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Sean $r:\ (0, 0, 0) + t(1, 0, 1)$ y $s:\ (1, 1, 0) + \lambda(0, 1, 1)$.

a. Comprueba que las rectas se cruzan.
b. Calcula $\vec{u} \times \vec{v}$.
c. Calcula la distancia entre las rectas.

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – Proyección y simétrico respecto de un plano

Para proyectar un punto sobre un plano se traza la recta perpendicular al plano que pasa por el punto. Se consideran $P(4, 1, 0)$ y $\pi:\ x + y + z = 2$.

a. Escribe la recta perpendicular a π que pasa por P.
b. Halla la proyección H de P sobre π.

c. Halla el simétrico P' de P respecto de π.

d. Comprueba que .

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – Proyección y simétrico respecto de una recta

Se consideran el punto $P(3, 3, 0)$ y la recta $r:\ (x, y, z) = (1, 1, 0) + t(1, 2, -1)$.

a. Escribe un punto genérico X de r y el vector .

b. Halla el pie H de la perpendicular desde P.
c. Halla el simétrico P' de P respecto de r.
d. Calcula la distancia de P a r.

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – El dron sobre la ladera

Un dron de vigilancia forestal sobrevuela una ladera de la sierra de Guadarrama que se modeliza con el plano $\pi:\ x + 2y + 2z = 0$ (metros, eje z vertical). El dron está en $D(10, 20, 40)$. Por seguridad, la distancia del dron al terreno debe ser de al menos 50 m.

a. Calcula la distancia del dron a la ladera.
b. Calcula la altura del terreno justo debajo del dron y la distancia vertical hasta él.
c. Explica por qué las dos distancias son distintas.
d. ¿Hasta qué altura debe subir el dron (sin moverse en horizontal) para cumplir la norma?

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – La rampa accesible

La entrada de un centro de salud de Logroño tiene una rampa plana de 2 m de ancho que salva un desnivel de 0,5 m en 6 m de recorrido horizontal. Con el origen al pie de la rampa, el plano de la rampa pasa por $(0, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(6;\ 0;\ 0{,}5)$. La normativa municipal exige una pendiente máxima del 8 %.

a. Halla un vector normal al plano de la rampa y su ecuación.
b. Calcula el ángulo que forma la rampa con el suelo.
c. Calcula la pendiente en porcentaje. ¿Cumple la normativa?
d. ¿Qué recorrido horizontal haría falta para cumplirla?

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – Dos tuberías que se cruzan

En la sala de máquinas de una depuradora de Murcia, una tubería sigue la recta $r:\ (0,0,3)+t(1,0,0)$ y otra la recta $s:\ (2,0,0)+\lambda(0,1,1)$, en metros. Para hacer el mantenimiento, entre las dos debe quedar un hueco de al menos 2 m.

a. Comprueba que las tuberías no se cortan.
b. Calcula la distancia mínima entre ellas.
c. ¿Se cumple la condición del mantenimiento?
d. Calcula el ángulo que forman las direcciones de las tuberías.

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – El espejo de la tienda

En una tienda de ropa de Barcelona hay un espejo vertical que ocupa el plano $\pi:\ x+y=6$ (metros). Una clienta tiene los ojos en $P(1;\ 1;\ 1{,}6)$ y un fotógrafo está en $C(0;\ 4;\ 1{,}6)$.

a. Halla el punto H del espejo más cercano a la clienta y la distancia de la clienta al espejo.
b. Halla la posición P' de la imagen de la clienta (simétrico respecto del espejo).
c. ¿A qué distancia ve la clienta su propia imagen?
d. El fotógrafo quiere fotografiar la imagen de la clienta. ¿Hacia qué punto del espejo debe apuntar?

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – La antena y la carretera

Una carretera recta de Castilla y León sigue la recta $r:\ (x,y,z)=t(4,3,0)$, en kilómetros. Una antena de telefonía está en $A(5,0,0)$ y da cobertura hasta 3,5 km de distancia.

a. Calcula la distancia de la antena a la carretera.
b. Halla el punto H de la carretera más cercano a la antena.
c. ¿Qué longitud de carretera tiene cobertura?
d. Un coche circula a 90 km/h. ¿Cuántos minutos tiene cobertura?

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – El tejado a dos aguas

El tejado de una casa rural de Asturias tiene dos faldones: $\pi_1:\ x-2z=0$ (para $0\le x\le 4$) y $\pi_2:\ x+2z=8$ (para $4\le x\le 8$), en metros.

a. Halla la recta de la cumbrera, donde se cortan los faldones.

b. Calcula el ángulo que forma cada faldón con el suelo.
c. Calcula el ángulo entre los dos planos.
d. ¿Qué ángulo forman los faldones en la cumbrera, por dentro de la casa? Relaciónalo con los anteriores.

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – Problema: la parcela en pendiente

Una agricultora de La Rioja tiene una parcela triangular en una ladera. Un topógrafo ha medido sus vértices con GPS y los ha anotado en la tabla (metros; z es la altura). Quiere saber la superficie real del terreno para comprar abono (2 kg por cada 10 m²) y colocar una tubería de riego desde el vértice C hasta el lado AB por el camino más corto.

Vértice	x (m)	y (m)	z (m)
A	0	0	0
B	40	0	10
C	10	30	5

a. Calcula los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ y el área real de la parcela.
b. ¿Cuántos kilos de abono necesita?
c. Halla el punto H del lado AB más cercano a C.
d. Calcula la longitud de la tubería y comprueba que es la altura del triángulo sobre AB.
e. ¿Es mayor o menor el área real que la de su proyección sobre el plano horizontal? Razona.

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – Problema: el lucernario de cristal

Un museo de Málaga tiene un lucernario de cristal con forma de pirámide de base cuadrada. Con el metro como unidad, la base tiene vértices $O(0,0,0)$, $A(4,0,0)$, $B(4,4,0)$ y $C(0,4,0)$, y el vértice superior es $V(2,2,3)$. El cristal cuesta 120 € por metro cuadrado.

a. Calcula el volumen del lucernario.
b. Halla la ecuación del plano de la cara OAV y el ángulo que forma con la base.
c. Calcula el ángulo que forma la arista OV con la base.
d. Calcula el área de cristal de las cuatro caras y su coste.
e. Calcula la distancia del centro de la base $(2,2,0)$ a la cara OAV.

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – Problema: el foco y el suelo de espejo

En el escenario de un teatro de Sevilla, el suelo es un espejo (plano $z = 0$). Un foco en $A(1, 1, 2)$ debe iluminar, después de reflejarse en el suelo, a un actor cuya cara está en $B(5, 3, 4)$ (metros). La luz sigue el camino más corto que toca el espejo, y en ese camino el ángulo de llegada es igual al de salida.

a. Halla el simétrico A' del foco respecto del suelo.
b. Halla el punto R del suelo donde debe apuntar el foco (corte de la recta $A'B$ con el suelo).
c. Calcula la longitud del camino $A \to R \to B$.
d. Comprueba que los ángulos que forman [illegible] y [illegible] con el suelo son iguales.
e. Explica por qué cualquier otro punto del suelo da un camino más largo.

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Problema: planos bisectores

El lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos planos que se cortan está formado por dos planos, llamados bisectores. Se consideran $\pi_1 :\ 2x + y - 2z - 1 = 0$ y $\pi_2 :\ x - 2y + 2z - 3 = 0$.

a. Comprueba que los vectores normales tienen el mismo módulo.
b. Escribe la condición $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$ para $P(x, y, z)$.
c. Halla las ecuaciones de los dos planos bisectores.
d. Comprueba que los bisectores son perpendiculares entre sí.
e. Comprueba que el punto $(2, 0, 1)$ está en el primer bisector y equidista de π_1 y π_2.

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Problema: el muro de la bodega

Una bodega antigua de Ribera del Duero tiene un muro de piedra cuyas caras son los planos $\pi_1 :\ 3x + 4y = 0$ y $\pi_2 :\ 3x + 4y = 6$ (metros). Se quiere hacer un agujero recto para pasar una tubería. La broca entra por el punto $(0, 0, 1)$ de la cara interior.

a. Comprueba que las caras son paralelas y calcula el grosor del muro.
b. Si se taladra en la dirección horizontal $(1, 0, 0)$, ¿por qué punto sale la broca? ¿Qué longitud tiene el agujero?
c. Calcula el ángulo entre la dirección de la broca y la normal del muro y relaciónalo con el apartado anterior.
d. ¿En qué dirección hay que taladrar para que el agujero sea lo más corto posible? ¿Cuánto mide entonces?
e. El volumen de piedra que se extrae con una broca de 10 cm de diámetro, ¿es mayor en el primer caso o en el segundo? Calcúlalo aproximando el agujero por un cilindro.

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: la perpendicular común

Para ir más allá. Dos rectas que se cruzan tienen una única recta que las corta a las dos perpendicularmente: la perpendicular común. Sus puntos de corte son los puntos más próximos de las dos rectas. Sean $r:\ (t, 0, t)$ y $s:\ (1,\ 1+\lambda,\ \lambda)$.

a. Escribe el vector $\overrightarrow{PQ}$ entre un punto genérico P de r y uno Q de s.

b. Impón que $\overrightarrow{PQ}$ sea perpendicular a las dos rectas y halla t y λ.

c. Halla los puntos P y Q y la ecuación de la perpendicular común.

d. Comprueba que $|\overrightarrow{PQ}|$ coincide con la distancia calculada con el producto mixto, $\frac{2}{\sqrt{3}}$.