Soluciones - Distancias, ángulos y áreas

Curso: 2 Bachillerato Ciencias

Solución del ejercicio 1

La longitud de cada lado es el módulo del vector que une sus extremos. Comparando las tres longitudes se clasifica el triángulo, y en un triángulo isósceles la mediana trazada al lado desigual es a la vez altura, lo que permite calcular el área.

a. , , , . Es isósceles.

b. $M = \left(\frac{4+0}{2}, \frac{3+3}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = (2, 3, 1)$.

c. , de módulo $\sqrt{5} \approx 2{,}24$. En un triángulo isósceles la mediana del lado desigual es perpendicular a él: $(0, 2, 1) \cdot (-4, 0, 0) = 0$.

d. $\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5} \approx 4{,}47$ unidades cuadradas.

Solución del ejercicio 2

El ángulo entre dos rectas se calcula con sus vectores directores. Se toma el valor absoluto del producto escalar para obtener siempre el ángulo agudo, y si el producto escalar es cero las rectas son perpendiculares.

a. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 - 2 + 4 = 4$, $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 3$. $\cos\alpha = \frac{4}{9} \approx 0{,}4444$, $\alpha \approx 63{,}6°$.

b. $\vec{u} \cdot \vec{w} = 2 + 2 - 4 = 0$: son perpendiculares (forman $90°$).

c. $\vec{v} \cdot \vec{w} = 4 - 1 - 4 = -1$. $\cos\alpha = \frac{|-1|}{9} \approx 0{,}1111$, $\alpha \approx 83{,}6°$.

d. Dos rectas forman dos ángulos suplementarios; por convenio se da el agudo, que es el que tiene coseno positivo.

Solución del ejercicio 3

Para el ángulo entre recta y plano se usa el seno, porque el vector conocido del plano es su normal, perpendicular a él. Para el ángulo entre dos planos se usa el coseno del ángulo entre sus normales.

a. $\vec{u} \cdot \vec{n} = (1, 1, 0) \cdot (1, 0, 1) = 1$, $|\vec{u}| = |\vec{n}| = \sqrt{2}$. $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30°$.

b. $(1, 1, 1) \cdot (1, -1, 0) = 1 - 1 + 0 = 0$: las normales son perpendiculares, luego los planos también.

c. $(1, 1, 1) \cdot (2, 1, -1) = 2$. $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{3}\sqrt{6}} = \dfrac{2}{\sqrt{18}} \approx 0{,}4714$, $\alpha \approx 61{,}9°$.

d. El vector normal forma $90°$ con el plano. Si la recta forma un ángulo β con la

normal, forma $90^\circ - \beta$ con el plano, y $\cos\beta = \sin(90^\circ - \beta)$.

Solución del ejercicio 4

La fórmula de la distancia de un punto a un plano sustituye el punto en la ecuación y divide entre el módulo del vector normal. Para planos paralelos basta tomar un punto de uno de ellos y medir su distancia al otro.

a. $d = \dfrac{|6+1+4-3|}{\sqrt{4+1+4}} = \dfrac{8}{3} \approx 2{,}67$.

b. Se toma un punto de π', por ejemplo $(-3,0,0)$: $d = \dfrac{|-6-0+0-3|}{3} = 3$.

También con la fórmula $\dfrac{|D-D'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \dfrac{|-3-6|}{3} = 3$.

c. $2x - y + 2z + D = 0$ con $\dfrac{|D+3|}{3} = 2$: $D+3 = \pm 6$, $D = 3$ o $D = -9$. Planos $2x - y + 2z + 3 = 0$ y $2x - y + 2z - 9 = 0$.

Solución del ejercicio 5

La distancia de un punto a una recta es la altura de un paralelogramo construido sobre el vector director, y se obtiene dividiendo el área, dada por el producto vectorial, entre la base. El pie de la perpendicular se obtiene imponiendo un producto escalar nulo.

a. [illegible] , de módulo $\sqrt{22}$. $d = \dfrac{\sqrt{22}}{\sqrt{2}} = \sqrt{11} \approx 3{,}32$.

b. Un punto genérico de r es $X = (1+t, t, 0)$ y [illegible]. Debe ser perpendicular a $\vec{u}$: $t + t - 2 = 0$, $t = 1$. $H = (2,1,0)$.

c. [illegible] y [illegible]. Coincide.

Solución del ejercicio 6

Primero se comprueba que las rectas se cruzan con el producto mixto. La distancia es la altura del paralelepípedo construido sobre los dos vectores directores y el vector que une un punto de cada recta: volumen dividido entre área de la base.

a. $\vec{u} = (1,0,1)$ y $\vec{v} = (0,1,1)$ no son proporcionales. [illegible] y

[redacted] : se cruzan.

b. $\vec{u} \times \vec{v} = (0 \cdot 1 - 1 \cdot 1,\ 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1,\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) = (-1, -1, 1)$, de módulo $\sqrt{3}$.

c. $d = \dfrac{|-2|}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}15$.

Solución del ejercicio 7

Para proyectar un punto sobre un plano se traza la recta perpendicular al plano por ese punto, con la normal como vector director, y se corta con el plano. El simétrico se obtiene usando que la proyección es el punto medio.

a. Vector director: la normal $(1, 1, 1)$. Recta $(4 + t,\ 1 + t,\ t)$.
b. $(4 + t) + (1 + t) + t = 2$, $3t = -3$, $t = -1$: $H = (3, 0, -1)$.
c. H es el punto medio de PP':
$P' = 2H - P = (6 - 4,\ 0 - 1,\ -2 - 0) = (2, -1, -2)$.
d. $d(P, \pi) = \dfrac{|4 + 1 + 0 - 2|}{\sqrt{3}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ y [redacted].

Solución del ejercicio 8

Se toma un punto genérico de la recta y se impone que el vector que lo une con el punto dado sea perpendicular al vector director. Así se obtiene el pie de la perpendicular, y de él el simétrico y la distancia.

a. $X = (1 + t,\ 1 + 2t,\ -t)$ y [redacted].
b. [redacted], $t = 1$: $H = (2, 3, -1)$.
c. $P' = 2H - P = (4 - 3,\ 6 - 3,\ -2 - 0) = (1, 3, -2)$.
d. [redacted].

Solución del ejercicio 9

a. $d = \dfrac{|10 + 40 + 80|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \dfrac{130}{3} \approx 43{,}33$ m.
b. Con $x = 10$, $y = 20$: $10 + 40 + 2z = 0$, $z = -25$. Distancia vertical:
$40 - (-25) = 65$ m.
c. La distancia a un plano se mide por la perpendicular, que es el camino más corto. La vertical solo coincide con la perpendicular si el plano es horizontal.

d. $\dfrac{|50+2z|}{3}=50$ con $z>0$: $50+2z=150$, $z=50$ m. Debe subir 10 m.

Solución del ejercicio 10

El ángulo de la rampa con el suelo es el ángulo entre los dos planos, que se calcula con sus vectores normales. La pendiente en porcentaje es el desnivel dividido entre el recorrido horizontal, multiplicado por cien.

a. $(0,2,0)\times(6;\,0;\,0{,}5)=(2\cdot 0{,}5-0,\ 0\cdot 6-0\cdot 0{,}5,\ 0-2\cdot 6)=(1,0,-12)$. Plano $x-12z=0$.

b. $\cos\alpha=\dfrac{|(1,0,-12)\cdot(0,0,1)|}{\sqrt{145}}=\dfrac{12}{\sqrt{145}}\approx 0{,}9965$, $\alpha\approx 4{,}76^\circ$.

c. Pendiente $=\frac{0{,}5}{6}\approx 0{,}0833$, es decir, un 8,33 %. Supera el 8 %: no cumple.

d. $\frac{0{,}5}{0{,}08}=6{,}25$ m de recorrido horizontal.

Solución del ejercicio 11

a. Si se cortaran: $t=2$, $0=\lambda$ y $3=\lambda$, lo que es imposible. Los vectores $(1,0,0)$ y $(0,1,1)$ no son proporcionales: se cruzan.

b. $\vec{u}\times\vec{v}=(0,-1,1)$, de módulo $\sqrt{2}$. [redacted] y [redacted]. $d=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\approx 2{,}12$ m.

c. Sí, por poco: $2{,}12>2$.

d. $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$: son perpendiculares, forman 90°.

Solución del ejercicio 12

El reflejo en un espejo plano es el punto simétrico respecto del plano del espejo. Para hacer la foto de la imagen hay que apuntar hacia el simétrico, y el punto del espejo buscado es el corte de esa recta con el plano.

a. Recta perpendicular: $(1+t,\ 1+t,\ 1{,}6)$. En el espejo: $2+2t=6$, $t=2$, $H=(3;\,3;\,1{,}6)$. $d=|(2,2,0)|=2\sqrt{2}\approx 2{,}83$ m.

b. $P'=2H-P=(5;\,5;\,1{,}6)$.

c. [redacted] m, el doble de la distancia al espejo.

d. Apunta a la imagen P': recta $C+s(P'-C)=(5s,\ 4+s,\ 1{,}6)$. En el espejo: $5s+4+s=6$, $s=\frac{1}{3}$. Punto $\left(\frac{5}{3};\,\frac{13}{3};\,1{,}6\right)$.

Solución del ejercicio 13

La distancia de la antena a la carretera es la distancia de un punto a una recta. Después, con el teorema de Pitágoras, se calcula hasta dónde llega la cobertura a cada lado del punto más cercano de la carretera.

a. . $d = \dfrac{15}{5} = 3$ km.

b. $X = (4t, 3t, 0)$ y : $4(4t-5) + 9t = 0$, $25t = 20$, $t = 0{,}8$. $H = (3{,}2;\ 2{,}4;\ 0)$

.

c. Los puntos con cobertura distan de H como mucho $\sqrt{3{,}5^2 - 3^2} = \sqrt{3{,}25} \approx 1{,}803$ km (Pitágoras). Longitud: $2 \cdot 1{,}803 \approx 3{,}61$ km.

d. $\frac{3{,}61}{90}$ h $\approx 2{,}4$ minutos.

Solución del ejercicio 14

a. Restando las ecuaciones: $4z = 8$, $z = 2$, y $x = 4$. Cumbrera: $(4,\ t,\ 2)$, paralela al eje Y a 2 m de altura.

b. Normal de π_1: $(1, 0, -2)$. $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\alpha \approx 26{,}6°$. Por simetría, el otro faldón forma el mismo ángulo.

c. $\cos\beta = \dfrac{|1-4|}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \dfrac{3}{5}$, $\beta \approx 53{,}1°$.

d. $180° - 2 \cdot 26{,}6° \approx 126{,}87°$, que es el suplementario de $53{,}1°$: los planos forman dos ángulos suplementarios y la fórmula da el agudo.

Solución del ejercicio 15

a. , .

.

Área $= \frac{1}{2}\sqrt{90\,000 + 10\,000 + 1\,440\,000} = \frac{1}{2}\sqrt{1\,540\,000} \approx 620{,}5$ m².

b. $\frac{620{,}5}{10} \cdot 2 \approx 124{,}1$ kg.

c. con . $H \approx (10{,}59;\ 0;\ 2{,}65)$.

d. m. Con la fórmula: m. Coinciden.

e. La proyección horizontal tiene área $\frac{1}{2}|(0, 0, 1\,200)| = 600$ m², menor. El área real

es la proyectada dividida entre el coseno del ángulo de la ladera, que es menor que 1.

Solución del ejercicio 16

El volumen de una pirámide es un tercio del área de la base por la altura. Los ángulos con la base se obtienen con la normal de cada cara o con el seno del ángulo de la arista, y el área de cada cara con el producto vectorial.

a. $V = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 3 = 16$ m³.

b. . Plano $-3y + 2z = 0$.

Ángulo con $z = 0$: $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\alpha \approx 56{,}3°$.

c. $\sin\beta = \dfrac{3}{|(2,2,3)|} = \dfrac{3}{\sqrt{17}}$, $\beta \approx 46{,}7°$.

d. Cada cara mide $\frac{1}{2}|(0,-12,8)| = \frac{1}{2}\sqrt{208} \approx 7{,}21$ m². Total: $\approx 28{,}84$ m². Coste: $\approx 3461{,}33$ €.

e. $d = \dfrac{|-6+0|}{\sqrt{13}} \approx 1{,}66$ m.

Solución del ejercicio 17

a. $A' = (1,1,-2)$.

b. $A' + t(4,2,6)$; $z = 0$: $-2 + 6t = 0$, $t = \frac{1}{3}$. $R = \left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}, 0\right)$.

c. $|AR| = |A'R|$, así que el camino mide $|A'B| = \sqrt{16+4+36} = \sqrt{56} \approx 7{,}48$ m.

d. y . Los senos con el suelo son y , y como , los dos valen lo mismo.

e. Para otro punto X del suelo, $|AX| + |XB| = |A'X| + |XB| \geq |A'B|$ por la desigualdad triangular, con igualdad solo si X está en el segmento $A'B$.

Solución del ejercicio 18

Un punto está en un plano bisector si su distancia a los dos planos es la misma. Al igualar las dos distancias aparecen dos signos posibles, por eso hay dos bisectores, que siempre son perpendiculares entre sí.

a. $|(2,1,-2)| = |(1,-2,2)| = 3$.

b. $\dfrac{|2x+y-2z-1|}{3} = \dfrac{|x-2y+2z-3|}{3}$, es decir, $2x + y - 2z - 1 = \pm(x - 2y + 2z - 3)$.

c. Con $+$: $x+3y-4z+2=0$. Con $-$: $3x-y-4=0$.
d. $(1,3,-4)\cdot(3,-1,0)=3-3+0=0$.
e. $2+0-4+2=0$: está en el bisector. $d(P,\pi_1)=\dfrac{|4+0-2-1|}{3}=\dfrac{1}{3}$ y $d(P,\pi_2)=\dfrac{|2-0+2-3|}{3}=\dfrac{1}{3}$. Equidista.

Solución del ejercicio 19

a. Las normales coinciden, $(3,4,0)$. Grosor: $\dfrac{|6-0|}{\sqrt{9+16}}=\dfrac{6}{5}=1{,}2$ m.
b. $(t,0,1)$ con $3t=6$: $t=2$. Sale por $(2,0,1)$ y el agujero mide 2 m.
c. $\cos\alpha=\dfrac{(1,0,0)\cdot(3,4,0)}{5}=0{,}6$. La longitud es el grosor dividido entre el coseno: $\frac{1{,}2}{0{,}6}=2$ m.
d. En la dirección de la normal $(3,4,0)$: el agujero mide 1,2 m, el grosor.
e. $\pi\cdot 0{,}05^2\cdot 2\approx 0{,}0157$ m³ frente a $\pi\cdot 0{,}05^2\cdot 1{,}2\approx 0{,}0094$ m³: el primero es mayor.

Solución del ejercicio 20

Se escribe el vector que une un punto genérico de cada recta y se impone que sea perpendicular a los dos vectores directores. Resulta un sistema de dos ecuaciones con dos parámetros cuya solución da los dos puntos más próximos.

a. [redacted] .

b. Con $(1,0,1)$: $1-t+\lambda-t=0$. Con $(0,1,1)$: $1+\lambda+\lambda-t=0$. Es decir, $2t-\lambda=1$ y $t-2\lambda=1$. Restando el doble de la segunda a la primera: $3\lambda=-1$, $\lambda=-\frac{1}{3}$, y $t=\frac{1}{3}$.

c. $P=\left(\frac{1}{3},0,\frac{1}{3}\right)$, $Q=\left(1,\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$ y [redacted] . Perpendicular común: $\left(\frac{1}{3},0,\frac{1}{3}\right)+\mu(1,1,-1)$.

d. [redacted] . Coincide.