Apuntes - Determinantes

Curso: 2 Bachillerato Ciencias

Actividad de introducción: ampliar una fotografía

Una fotocopiadora de la biblioteca amplía un dibujo un 150 % en horizontal y un 200 % en vertical. Si el dibujo original ocupa un rectángulo de 10 cm por 6 cm, el resultado mide 15 cm por 12 cm. Calcula las dos áreas y divídelas: el área se ha multiplicado por 3. Ese 3 es precisamente el producto de los dos factores, $1{,}5 \cdot 2$, y también es el determinante de la matriz diagonal $\begin{pmatrix} 1{,}5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ que describe la ampliación. Prueba ahora con una reducción al 50 % en horizontal y vertical: el determinante es $0{,}25$ y el área queda en la cuarta parte. Si en cambio una transformación aplastara el dibujo sobre una línea, el determinante sería cero y el área desaparecería. Esa idea, que el determinante mide cuánto cambia el tamaño y detecta cuándo se pierde información, explica por qué solo las matrices de determinante distinto de cero tienen inversa. En este tema el determinante será la herramienta para saber si una matriz es invertible, calcular su inversa, estudiar el rango, discutir sistemas con parámetros y calcular áreas y volúmenes.

Concepto de determinante

Definición: concepto de determinante

El **determinante** de una matriz cuadrada A es un número, $|A|$ o $\det A$, que resume si la matriz es invertible. Para orden 2:

[redacted]

Para orden 3 se usa la **regla de Sarrus**: suman los productos de la diagonal principal y de sus dos paralelas, y restan los de la diagonal secundaria y sus dos paralelas:

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Ejemplo 1

[redacted]

.

Menores, adjuntos y desarrollo por una fila

Definición: menores, adjuntos y desarrollo por una fila

El **menor** M_{ij} es el determinante que queda al suprimir la fila i y la columna j. El **adjunto** es $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. El **desarrollo de Laplace** por la fila i dice $|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$ (también vale por columnas). Conviene elegir la fila o columna con más ceros.

Ejemplo 2

Para [redacted] se desarrolla por la columna 2, que solo tiene un elemento no nulo (un 1 en la fila 3, posición $(3,2)$, signo $(-1)^5 = -1$): [redacted].

Propiedades

Propiedades: propiedades

- $|A^t| = |A|$.
- Si una fila (o columna) es nula, o dos filas son iguales o proporcionales, $|A| = 0$.
- Intercambiar dos filas cambia el signo del determinante.
- Multiplicar una fila por λ multiplica el determinante por λ. Por tanto $|\lambda A| = \lambda^n |A|$ si A es de orden n.
- Sumar a una fila un múltiplo de otra no cambia el determinante. Esta propiedad permite **hacer ceros**.
- $|AB| = |A|\,|B|$. Si A es invertible, $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$.
- Si la matriz es triangular, el determinante es el producto de la diagonal.

Atención: $|A + B| \neq |A| + |B|$ en general.

Rango por menores

Definición: rango por menores

El **rango** de una matriz es el orden del mayor menor distinto de cero. Se procede así: se busca un menor de orden 2 no nulo; después se *orlan* (se amplían con una fila y una columna más) y se comprueba si algún menor de orden 3 es no nulo, y así sucesivamente. Si todos los menores de orden $r+1$ que orlan a uno de orden r no nulo valen 0, el rango es r.

Inversa con adjuntos

Definición: inversa con adjuntos

A es invertible si y solo si $|A| \neq 0$, y entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\operatorname{Adj} A)^t,$$

donde $\operatorname{Adj} A$ es la matriz formada por los adjuntos de cada elemento. En orden 2: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Ejemplo 3

Para : $|A| = 6 + 0 + 0 - 0 - 2 - 3 = 1$. Los adjuntos son $A_{11} = 2$, $A_{12} = -3$, $A_{13} = 1$, $A_{21} = -3$, $A_{22} = 6$, $A_{23} = -2$, $A_{31} = 1$, $A_{32} = -2$, $A_{33} = 1$. Como $|A| = 1$, .

Determinantes con parámetros

Definición: determinantes con parámetros

En los problemas de la PAU se pide para qué valores de un parámetro m existe la inversa, o cuál es el rango. Se calcula $|A|$ en función de m, se factoriza y se resuelve $|A| = 0$. Para los valores que anulan el determinante hay que estudiar el rango a mano.

Ejemplo 4

. Restando la fila 1 a las otras dos:

[redacted]

. Es invertible si $m \neq 1$ y $m \neq -1$. Si $m = 1$ el rango es 1; si $m = -1$, el rango es 2.

Aplicaciones geométricas

Definición: aplicaciones geométricas

El área de un triángulo de vértices (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) es $\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$.

Tres puntos están alineados si ese determinante vale 0. En el espacio, el determinante 3×3 formado por tres vectores es su producto mixto (se verá en el tema de vectores).

Errores frecuentes

¡Atención!

- Olvidar el signo $(-1)^{i+j}$ en Laplace.
- Escribir $|2A| = 2|A|$ cuando debe ser $2^n|A|$.
- Calcular la inversa con la matriz de adjuntos sin traspuesta.
- Al multiplicar una fila por un número para hacer ceros, olvidar que el determinante cambia.

Más ejemplos resueltos

Ejemplo 5

Calcula $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{vmatrix}$. Se hace $F_2 - 2F_1$ y $F_3 - 3F_1$, que no alteran el determinante:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$. Desarrollando por la primera columna queda $1 \cdot (1 \cdot 2 - 1 \cdot 1) = 1$.

Ejemplo 6

Sea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. El menor $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, así que el rango es al menos 2.

Como $|A| = 0$ (la fila 2 es el doble de la fila 1), el rango es exactamente 2.

Ejemplo 7

Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$, calcula $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{vmatrix}$. Se saca factor común 3 de la fila 1 y 2 de la fila

2: el valor es $3 \cdot 2 \cdot 5 = 30$.

Cómo decidir el método

Observación

Si la matriz es 2×2 o 3×3 con números pequeños, aplica la fórmula directa. Si hay un parámetro, usa operaciones con filas para que aparezcan ceros y el determinante salga ya factorizado. En orden 4 o superior, no existe una regla de Sarrus: se combinan ceros y Laplace. Y recuerda que para saber si una matriz es invertible no hace falta el valor exacto del determinante, solo saber si es cero o no.

Método: calcular un determinante y la inversa

1. Busca la fila o columna con más ceros, o haz ceros con $F_i + \lambda F_j$.
2. Desarrolla por esa línea con el signo $(-1)^{i+j}$.
3. Si $|A| \neq 0$, calcula la matriz de adjuntos, trasponla y divide entre $|A|$.
4. Comprueba que $AA^{-1} = I$.

Cómo calcular un determinante sin equivocarse

Método: elegir el camino más corto

1. Si la matriz es de orden 2 o 3, usa la fórmula directa o la regla de Sarrus y calcula por separado los tres productos directos y los tres inversos.
2. Si es de orden 4 o superior, o si tiene parámetros, haz ceros con operaciones entre filas (sumar un múltiplo de una fila a otra no cambia el valor) hasta dejar una línea con un solo elemento distinto de cero.
3. Desarrolla por esa línea, sin olvidar el signo del tablero $(-1)^{i+j}$.
4. Si aparece una fila o columna de ceros, o dos líneas proporcionales, el determinante es cero.
5. Comprueba el resultado con otra vía, por ejemplo desarrollando por otra fila, o sustituyendo un valor sencillo del parámetro.

Ejemplo 8

Calcula  **haciendo ceros.**

Elegimos como pivote el 1 de la fila 2, columna 1. Restamos a la fila 1 el doble de la fila 2 y a la fila 4 la fila 2: resultan $F_1 - 2F_2 = (0, -5, -2, 1)$ y $F_4 - F_2 = (0, -3, 0, 4)$. Esas operaciones no cambian el determinante. Ahora la primera columna es

$(0,1,0,0)^t$ y al desarrollar por ella solo sobrevive el pivote, con signo $(-1)^{2+1} = -1$.

Queda . Por Sarrus, los productos directos suman $-40 + 6 + 0 = -34$ y los inversos $-6 + 0 - 8 = -14$, de modo que el determinante de orden 3 es $-34 - (-14) = -20$ y el resultado final es $-(-20) = 20$.

Determinantes, áreas y volúmenes

Propiedad: interpretación geométrica

El valor absoluto de es el área del paralelogramo construido sobre los vectores (a,b) y (c,d). En el espacio, el valor absoluto del determinante de tres vectores es el volumen del paralelepípedo que forman. De aquí salen las fórmulas del triángulo, $\frac{1}{2}|\det|$, y del tetraedro, $\frac{1}{6}|\det|$. Un determinante nulo significa que los vectores son coplanarios o colineales y la figura no tiene área ni volumen.

Ejemplo 9

Comprueba que los puntos $A(1,1)$, $B(4,2)$ y $C(7,3)$ están alineados.

Formamos el determinante con una columna de unos: las filas son $(1,1,1)$, $(4,2,1)$ y $(7,3,1)$. Los productos directos suman $2 + 7 + 12 = 21$ y los inversos $14 + 3 + 4 = 21$. La diferencia es cero, luego los puntos están alineados. Se puede entender también porque el paso de A a B es $(3,1)$ y el de B a C es otra vez $(3,1)$: ambos vectores son proporcionales.

¡Atención!

- Pensar que $|A+B| = |A| + |B|$: el determinante no es lineal respecto de la suma de matrices.
- Olvidar que $|kA| = k^n|A|$ y escribir $k|A|$.
- Sacar el factor común de una sola fila cuando se multiplica toda la matriz.
- Equivocarse en el signo del tablero $(-1)^{i+j}$ al desarrollar por adjuntos.
- Usar la regla de Sarrus en determinantes de orden 4, donde no es válida.

Observación: determinantes en la PAU

En la PAU de Matemáticas II los determinantes casi nunca aparecen solos. Suelen servir para tres cosas: decidir para qué valores de un parámetro una matriz es invertible o tiene cierto rango, discutir sistemas con la regla de Cramer o el teorema de Rouché-Frobenius, y calcular áreas y volúmenes en el apartado de geometría. Aprende a factorizar el determinante resultante: los valores críticos del parámetro son las raíces de ese polinomio y tendrás que estudiar cada uno por separado,

sustituyendo el valor y calculando el rango a mano. No te olvides del caso general, en el que el parámetro no es crítico.

¿Sabías que?

El determinante apareció antes que las matrices. El matemático japonés Seki Takakazu lo utilizó en 1683 para resolver sistemas de ecuaciones, y en Europa Leibniz lo descubrió casi a la vez. Los nombres de Cramer, Laplace y Sarrus se asociaron después a los métodos de cálculo. Hoy los ordenadores calculan determinantes enormes en la simulación de estructuras de puentes y edificios.

El consejo de Otto

Antes de aplicar Sarrus, mira si hay filas o columnas con muchos ceros o proporcionales. Con dos operaciones inteligentes puedes ahorrarte media hoja de cuentas, y en el examen cada minuto cuenta.