Ejercicios - Determinantes

Curso: 2 Bachillerato Ciencias · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Determinantes de orden 2 y 3

El determinante de orden 2 es [redacted]. El de orden 3 se calcula con la regla de Sarrus: tres productos en la dirección de la diagonal principal menos tres en la dirección de la secundaria.

a. Calcula [redacted].

b. Calcula [redacted] por Sarrus.

c. Calcula [redacted] y explica qué significa el resultado para sus filas.

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Propiedades de los determinantes

Sean A y B matrices cuadradas de orden 3 con $|A| = 3$ y $|B| = -2$. Recuerda que $|A^t| = |A|$, $|AB| = |A||B|$, $|kA| = k^n|A|$ para matrices de orden n y $|A^{-1}| = 1/|A|$.

a. Calcula $|AB|$ y $|BA|$.
b. Calcula $|2A|$ y $|A^t|$.
c. Calcula $|A^{-1}|$ y $|A^2B^{-1}|$.
d. Calcula $|A + B|$ si es posible. Razona la respuesta.

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Desarrollo por adjuntos

El determinante se puede desarrollar por una fila o columna: $|A| = \sum_j a_{ij}A_{ij}$, con [redacted]

$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$. Conviene elegir la línea con más ceros. Sea [redacted].

a. Haz ceros en la primera columna con operaciones entre filas.
b. Desarrolla por esa columna y calcula el determinante de orden 3 resultante.
c. Comprueba el resultado desarrollando el determinante original por la cuarta columna.

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Determinante de Vandermonde

Se considera .

a. Resta la primera columna a las otras dos y desarrolla por la primera fila.
b. Factoriza el resultado y demuestra que $V = (b-a)(c-a)(c-b)$.
c. Calcula V para $a=1$, $b=2$, $c=4$.
d. ¿Para qué valores de a, b, c es $V = 0$?

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Rango por menores

El rango es el orden del mayor menor no nulo. Se parte de un menor de orden 2

distinto de cero y se orla con filas y columnas. Sea .

a. Halla un menor de orden 2 no nulo.
b. Calcula los menores de orden 3 que contienen a ese menor.
c. Deduce el rango de A y explica la relación entre sus filas.

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Inversa con adjuntos

Si $|A| \neq 0$, entonces $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}(\operatorname{Adj} A)^t$. Sea .

a. Calcula $|A|$.
b. Calcula la matriz de adjuntos $\operatorname{Adj} A$.
c. Escribe A^{-1}.
d. Comprueba que $AA^{-1} = I$.

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – Ecuaciones con determinantes

Resuelve la ecuación [redacted].

a. Desarrolla el determinante por Sarrus.
b. Factoriza el polinomio obtenido.
c. Indica las soluciones y comprueba una de ellas.

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – Volumen de una pirámide

El volumen de un tetraedro de vértices A, B, C, D es [redacted]. Una pieza decorativa de cristal tiene forma de tetraedro con vértices $A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $C(0,3,0)$ y $D(0,0,6)$ (medidas en decímetros).

a. Calcula los vectores [redacted].
b. Calcula el determinante que forman.
c. Halla el volumen en dm^3 y en litros.
d. Comprueba el resultado con la fórmula (área de la base por altura) entre 3.

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – Parcela triangular

Una parcela de un pueblo de Navarra tiene forma de triángulo con vértices $A(0,0)$, $B(80,10)$ y $C(100,70)$, en metros. El área de un triángulo de vértices $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$ es $\frac{1}{2}$ el valor absoluto de [redacted].

a. Escribe el determinante con las coordenadas.
b. Calcula el área de la parcela.
c. El metro cuadrado se valora a 12 €. ¿Cuánto vale la parcela?
d. ¿Cuánto mide el perímetro? (Redondea a metros.)

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – Las mezclas del tostador de café

Un tostador de café de Vigo prepara tres mezclas A, B y C con tres orígenes: Colombia, Brasil y Etiopía. La tabla da los kilos de cada origen que lleva un saco de cada mezcla. Si se compran a, b y c sacos de A, B y C, los kilos de cada origen son el producto de la

matriz M por $(a, b, c)^t$.

	Mezcla A	Mezcla B	Mezcla C
Colombia	3	1	2
Brasil	2	1	1
Etiopía	1	2	3

a. Escribe la matriz M y calcula su determinante.
b. Interpreta que el determinante sea distinto de cero.
c. Calcula M^{-1} por adjuntos.
d. Un cliente necesita exactamente 13 kg de Colombia, 8 kg de Brasil y 13 kg de Etiopía. ¿Cuántos sacos de cada mezcla debe preparar?

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – Invertibilidad según un parámetro

Se considera la matriz .

a. Calcula $|A_a|$.
b. ¿Para qué valores reales de a es invertible A_a?
c. Calcula la inversa para $a = 2$.
d. Comprueba el resultado.

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – La compra de fruta con Cramer

En una frutería de Murcia, una clienta paga 6,70 € por 2 kg de manzanas, 1 kg de peras y 1 kg de uvas. Otro cliente paga 11,60 € por 1 kg de manzanas, 3 kg de peras y 2 kg de uvas. Un tercero paga 8 € por 1 kg de manzanas, 1 kg de peras y 2 kg de uvas. Los precios por kilo son x (manzanas), y (peras) y z (uvas).

a. Escribe el sistema y su matriz de coeficientes.
b. Calcula el determinante de la matriz de coeficientes.
c. Aplica la regla de Cramer para hallar x, y y z.
d. Calcula cuánto cuesta 1 kg de cada fruta y cuánto pagaría quien lleve 3 kg de manzanas y 2 kg de uvas.

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – Rango con dos parámetros

Estudia el rango de según los valores de a y b.

a. Calcula el determinante de A.
b. ¿Cuál es el rango si $b \neq 2a$?
c. ¿Y si $b = 2a$? Justifica con un menor de orden 2.
d. Da un ejemplo numérico de cada caso.

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – Determinantes sin calcular

Sea A una matriz de orden 3 cuyas filas son F_1, F_2, F_3 y cuyo determinante es $|A| = 5$. Calcula, usando solo las propiedades, el determinante de cada matriz.

a. La matriz de filas $F_1,\ F_2 + F_3,\ F_3$.
b. La matriz de filas $2F_1,\ F_2,\ -F_3$.
c. La matriz de filas $F_2,\ F_1,\ F_3$.
d. Las matrices $3A$, A^{-1}, $A^t A$ y $\operatorname{Adj} A$.

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – Cuatro puntos coplanarios

Cuatro puntos son coplanarios si los vectores son linealmente

dependientes, es decir, si su determinante es cero. Se tienen $A(1,0,1)$, $B(2,1,0)$, $C(0,2,3)$ y $D(k,1,1)$, que representan los puntos de anclaje de una estructura.

a. Calcula los tres vectores.
b. Plantea el determinante que forman.
c. Halla k para que los cuatro puntos estén en un mismo plano.
d. Calcula el volumen del tetraedro cuando $k = 2$.

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – Problema: el solar de la urbanización

Una promotora de Valladolid dispone de un solar de forma cuadrilátera con vértices $A(0,0)$, $B(60,0)$, $C(80,50)$ y $D(10,40)$, medidos en metros. Quiere venderlo a 85 € el metro cuadrado y cercarlo con una valla de 18 € el metro.

a. Divide el cuadrilátero en los triángulos ABC y ACD y escribe los dos determinantes de área.
b. Calcula el área de cada triángulo y la del solar.
c. Calcula el precio de venta del solar.
d. Calcula la longitud de los cuatro lados y el coste de la valla (redondea a metros).

e. ¿Qué porcentaje del precio de venta supone el coste de la valla?

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – Reto: determinante de la adjunta

Sea A una matriz cuadrada de orden n con $|A| \neq 0$. Se cumple $A \cdot (\operatorname{Adj} A)^t = |A|\, I$.

a. Toma determinantes en la igualdad y demuestra que $|\operatorname{Adj} A| = |A|^{n-1}$.

b. Comprueba la fórmula con la matriz , que tiene $|A| = 5$.

c. Deduce el valor de $|A^{-1}|$ a partir de $A \cdot A^{-1} = I$.

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Reto: matrices antisimétricas

Una matriz es antisimétrica si $A^t = -A$.

a. Demuestra que el determinante de una matriz antisimétrica de orden impar es cero.

b. Comprueba el resultado con .

c. ¿Qué ocurre en orden 2? Calcula el determinante de $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Tres boyas alineadas

En una regata frente a la costa de Cantabria se colocan tres boyas en los puntos $A(1, 2)$, $B(3, k)$ y $C(5, 8)$ del plano de la bahía (en kilómetros). Tres puntos están alineados si el determinante vale cero.

a. Escribe el determinante.
b. Calcula k para que las tres boyas estén alineadas.
c. Halla la ecuación de la recta que forman y comprueba que pasa por B.
d. Calcula la distancia entre las boyas A y C.

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Reto: sistema homogéneo con parámetro

Un sistema homogéneo siempre tiene la solución trivial $(0, 0, 0)$. Tiene otras soluciones solo si el determinante de su matriz de coeficientes es cero. Se considera



.

a. Calcula el determinante de la matriz de coeficientes.
b. ¿Para qué valores de a hay soluciones no triviales?
c. Resuelve el sistema para $a = -2$.
d. Resuelve el sistema para $a = 1$ y describe geométricamente el conjunto de soluciones.