Soluciones - Determinantes

Curso: 2 Bachillerato Ciencias

Solución del ejercicio 1

El determinante de orden 2 es el producto de la diagonal principal menos el de la secundaria. Para el de orden 3 se usa la regla de Sarrus: se suman los tres productos en la dirección de la diagonal principal y se restan los tres de la otra dirección.

a. $3 \cdot 4 - (-2) \cdot 5 = 12 + 10 = 22$.
b. Productos directos: $2 \cdot (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 4 = 4 + 0 + 4 = 8$. Productos inversos: $3 \cdot (-1) \cdot 1 + 4 \cdot 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 \cdot 0 = -3 + 16 + 0 = 13$. Resultado: $8 - 13 = -5$.
c. Directos: $45 + 84 + 96 = 225$. Inversos: $105 + 48 + 72 = 225$. El determinante es 0: las filas son linealmente dependientes, pues $F_1 + F_3 = 2F_2$.

Solución del ejercicio 2

Se aplican las propiedades de los determinantes sin calcular ninguna matriz. Hay que tener cuidado con el producto por un número, que sale elevado al orden de la matriz, y con la inversa, cuyo determinante es el inverso.

a. $|AB| = 3 \cdot (-2) = -6$ y $|BA| = -6$ también, aunque $AB \neq BA$ en general.
b. $|2A| = 2^3 \cdot 3 = 24$ (el factor 2 sale de cada una de las 3 filas). $|A^t| = 3$.
c. $|A^{-1}| = \frac{1}{3}$. $|A^2 B^{-1}| = |A|^2 / |B| = 9/(-2) = -\frac{9}{2}$.
d. No se puede calcular con los datos: el determinante de una suma no es la suma de los determinantes. Hace falta conocer las matrices.

Solución del ejercicio 3

a. $F_2 - 2F_1 = (0, -3, -2, 3)$ y $F_4 - F_1 = (0, -2, 1, 1)$. La matriz queda con un solo elemento no nulo en la primera columna, el 1 de arriba.

b. . Por Sarrus, los productos directos suman $-3 + 4 + 3 = 4$ y los inversos $-6 - 3 - 2 = -11$. Entonces el determinante de orden 3 vale $4 - (-11) = 15$ y $D = 15$.
c. Se desarrolla D por la cuarta columna $(0, 3, 1, 1)^t$: con los signos del tablero (más, menos, más): $D = 3M_{24} - 1 \cdot M_{34} + 1 \cdot M_{44}$, donde $M_{24} = 3$, $M_{34} = -7$ y $M_{44} = -1$. Así $D = 3 \cdot 3 - (-7) + (-1) = 15$.

Solución del ejercicio 4

a. $C_2 - C_1$ y $C_3 - C_1$ dan la primera fila $(1, 0, 0)$ y la matriz . Se desarrolla por la primera fila y queda un determinante de orden 2.

b. $V = (b-a)(c^2-a^2) - (c-a)(b^2-a^2) = (b-a)(c-a)[(c+a) - (b+a)] = (b-a)(c-a)(c-b)$.

c. $V = (2-1)(4-1)(4-2) = 1 \cdot 3 \cdot 2 = 6$.

d. $V = 0$ si y solo si al menos dos de los números a, b, c son iguales.

Solución del ejercicio 5

a. El menor  (filas 1-2, columnas 1-2). El rango es al menos 2.

b. Se orla con la fila 3 y las columnas 3 y 4:  y .

c. Todos los menores de orden 3 que orlan al menor no nulo valen cero, luego el rango es 2. De hecho $F_3 = F_1 + F_2$.

Solución del ejercicio 6

Primero se comprueba que el determinante no es cero. Después se calcula cada adjunto con su signo, se forma la matriz adjunta, se traspone y se divide entre el determinante. El resultado se comprueba multiplicando por la matriz original.

a. Por Sarrus, los productos directos suman $1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \cdot 0 = 13$ y los inversos $0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0$. Entonces $|A| = 13$.

b. Los adjuntos son $A_{11} = 1$, $A_{12} = 6$, $A_{13} = -2$, $A_{21} = -2$, $A_{22} = 1$, $A_{23} = 4$, $A_{31} = 6$, $A_{32} = -3$, $A_{33} = 1$. Luego .

c. .

d. .

Solución del ejercicio 7

Se desarrolla el determinante para obtener un polinomio en x y se factoriza buscando raíces enteras. Cada raíz es una solución de la ecuación y se comprueba sustituyendo en el determinante.

a. Directos: $x \cdot x \cdot x + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 = x^3 + 2$. Inversos: $1 \cdot x \cdot 1 + x \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot x = 3x$. El determinante es $x^3 - 3x + 2$.
b. $x = 1$ es raíz ($1 - 3 + 2 = 0$). Dividiendo por $x - 1$ queda $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$. Luego $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$.
c. Las soluciones son $x = 1$ (doble) y $x = -2$. Comprobación con $x = -2$: las columnas suman $-2 + 1 + 1 = 0$ en cada fila, así que el determinante se anula.

Solución del ejercicio 8

Se calculan los tres vectores que salen de un mismo vértice restando coordenadas. El volumen del tetraedro es la sexta parte del valor absoluto del determinante formado por esos vectores.

a.  , , .

b. El determinante es una matriz diagonal: $2 \cdot 3 \cdot 6 = 36$.
c. $V = \frac{36}{6} = 6$ dm^3, es decir, 6 litros.
d. Base: triángulo ABC de área $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3$ dm^2. Altura: 6 dm. $V = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 6 = 6$ dm^3.

Solución del ejercicio 9

El área de un triángulo con vértices conocidos es la mitad del valor absoluto de un determinante de orden 3 con las coordenadas y una columna de unos. El valor absoluto es necesario porque el orden de los vértices puede dar un signo negativo.

a.  .

b. Se desarrolla por la primera fila: el único término es $1 \cdot (80 \cdot 70 - 10 \cdot 100) = 5600 - 1000 = 4600$. Área $= \frac{1}{2} \cdot 4600 = 2300$ m^2.
c. $2300 \cdot 12 = 27\,600$ €.
d. $AB = \sqrt{80^2 + 10^2} = \sqrt{6500} \approx 81$ m, $BC = \sqrt{20^2 + 60^2} = \sqrt{4000} \approx 63$ m y $AC = \sqrt{100^2 + 70^2} = \sqrt{14900} \approx 122$ m. Perímetro ≈ 266 m.

Solución del ejercicio 10

a. . Por Sarrus: productos directos

$3 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 9 + 1 + 8 = 18$ y productos inversos
$2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 = 2 + 6 + 6 = 14$. El determinante vale $18 - 14 = 4$.

b. Como $|M| \neq 0$, el rango es 3 y para cada pedido de kilos hay una única combinación de sacos: la matriz es invertible.

c. .

d. : 2 sacos de A, 1 de B y 3 de C. Comprobación:

$3 \cdot 2 + 1 + 2 \cdot 3 = 13$, $4 + 1 + 3 = 8$ y $2 + 2 + 9 = 13$.

Solución del ejercicio 11

Una matriz es invertible si y solo si su determinante es distinto de cero. Se calcula el determinante en función del parámetro y se buscan los valores que lo anulan; para los demás se calcula la inversa.

a. Por Sarrus: directos $1 + a \cdot a \cdot a + 0 = 1 + a^3$; inversos 0. Así $|A_a| = a^3 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1)$.
b. El factor $a^2 - a + 1$ no tiene raíces reales (su discriminante es $1 - 4 = -3$). Luego A_a es invertible si y solo si $a \neq -1$.

c. Para $a = 2$, $|A_2| = 9$ y .

d. .

Solución del ejercicio 12

Se plantea el sistema con una incógnita por cada precio y se aplica la regla de Cramer: cada incógnita es el cociente entre el determinante que resulta de cambiar su columna por los términos independientes y el determinante del sistema.

a. con .

b. $|M| = 6$ (distinto de cero: solución única).

c. $x = \dfrac{|M_x|}{|M|} = \dfrac{7{,}2}{6} = 1{,}2$, $y = \dfrac{|M_y|}{|M|} = \dfrac{10{,}8}{6} = 1{,}8$ y $z = \dfrac{|M_z|}{|M|} = \dfrac{15}{6} = 2{,}5$, donde

en cada M_i se sustituye la columna i por la columna de términos independientes.

d. Manzanas: 1,20 €/kg; peras: 1,80 €/kg; uvas: 2,50 €/kg. Compra pedida: $3 \cdot 1{,}2 + 2 \cdot 2{,}5 = 3{,}6 + 5 = 8{,}60$ €.

Solución del ejercicio 13

a. Se hacen ceros: $F_2 - 2F_1 = (0, 0, b - 2a)$ y $F_3 - F_1 = (0, 1, 1 - a)$, lo que no cambia el determinante. Desarrollando por la primera columna:

[redacted]

.

b. Si $b \neq 2a$, $|A| \neq 0$ y el rango es 3.

c. Si $b = 2a$, $|A| = 0$. El menor [redacted] (filas 1 y 3, columnas 1 y 2) asegura rango 2.

d. Con $a = 1$, $b = 5$: $|A| = 2 - 5 = -3$, rango 3. Con $a = 1$, $b = 2$: $|A| = 0$, rango 2.

Solución del ejercicio 14

Se usa cómo afecta cada operación con filas al determinante: intercambiar dos filas cambia el signo, multiplicar una fila por un número multiplica el determinante y sumar a una fila otra multiplicada no lo cambia.

a. Sumar a una fila una combinación de otras no cambia el determinante: vale 5.

b. Multiplicar una fila por un número multiplica el determinante por ese número: $2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 5 = -10$.

c. Intercambiar dos filas cambia el signo: -5.

d. $|3A| = 3^3 \cdot 5 = 135$. $|A^{-1}| = \frac{1}{5}$. $|A^t A| = 5 \cdot 5 = 25$. $|\operatorname{Adj} A| = |A|^2 = 25$ (para orden 3).

Solución del ejercicio 15

Cuatro puntos están en el mismo plano si los tres vectores que salen de uno de ellos son linealmente dependientes, es decir, si su determinante vale cero. Así se obtiene una ecuación para el parámetro.

a. [redacted] , [redacted] , [redacted] .

b. [redacted] .

c. Por Sarrus: productos directos $1 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \cdot (k - 1) + (-1)(-1) \cdot 1 = 2k - 1$ y productos inversos $(-1) \cdot 2 \cdot (k - 1) + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 0 = -2k + 4$. El determinante es $(2k - 1) - (-2k + 4) = 4k - 5$. Se iguala a cero: $4k - 5 = 0$, luego $k = \frac{5}{4}$.

d. Con $k = 2$: $4 \cdot 2 - 5 = 3$, luego $V = \frac{1}{6} \cdot 3 = \frac{1}{2}$ unidades cúbicas.

Solución del ejercicio 16

Un cuadrilátero se divide en dos triángulos con una diagonal. El área de cada triángulo se calcula con un determinante, y la suma da el área total del solar, con la que se obtiene el precio.

a. [redacted] y [redacted].

b. El primer determinante vale $60 \cdot 50 - 0 \cdot 80 = 3000$ y el segundo $80 \cdot 40 - 50 \cdot 10 = 2700$. Áreas: 1500 m^2 y 1350 m^2. Solar: 2850 m^2.

c. $2850 \cdot 85 = 242\,250$ €.

d. $AB = 60$ m, $BC = \sqrt{20^2 + 50^2} = \sqrt{2900} \approx 53{,}9$ m, $CD = \sqrt{70^2 + 10^2} = \sqrt{5000} \approx 70{,}7$ m y $DA = \sqrt{10^2 + 40^2} = \sqrt{1700} \approx 41{,}2$ m. Perímetro $\approx 225{,}8$ m, es decir, unos 226 m. Valla: $226 \cdot 18 = 4\,068$ €.

e. $\dfrac{4\,068}{242\,250} \approx 0{,}0168$, esto es, un $1{,}7\ \%$.

Solución del ejercicio 17

Se toman determinantes en los dos miembros de la igualdad, usando que el determinante de un producto es el producto de determinantes y que el de un número por la identidad es ese número elevado al orden.

a. $|A| \cdot |(\operatorname{Adj} A)^t| = ||A|I| = |A|^n$. Como $|(\operatorname{Adj} A)^t| = |\operatorname{Adj} A|$ y $|A| \neq 0$, se divide entre $|A|$: $|\operatorname{Adj} A| = |A|^{n-1}$.

b. Para $n = 3$ debe ser $5^2 = 25$. La matriz de adjuntos es [redacted] y su determinante es 25. Coincide.

c. $|A||A^{-1}| = |I| = 1$, luego $|A^{-1}| = 1/|A|$.

Solución del ejercicio 18

Se usa que una matriz y su traspuesta tienen el mismo determinante y que cambiar el signo de toda la matriz multiplica el determinante por menos uno elevado al orden. Si el orden es impar, el determinante es igual a su opuesto.

a. $|A| = |A^t| = |-A| = (-1)^n|A|$. Si n es impar, $|A| = -|A|$, luego $2|A| = 0$ y $|A| = 0$.

b. Por Sarrus: directos $0 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + (-1)(-2)(-3) = 6 - 6 = 0$ e inversos $0 + 0 + 0 = 0$. El determinante es 0.

c. El determinante vale $0 \cdot 0 - a \cdot (-a) = a^2$, que no es cero si $a \neq 0$: el resultado del primer apartado solo vale para orden impar.

Solución del ejercicio 19

Tres puntos del plano están alineados si el determinante formado por sus coordenadas y una columna de unos vale cero, porque entonces el triángulo que forman tiene área nula. Esa condición da una ecuación para el parámetro.

a.  .

b. Por Sarrus: directos $k + 10 + 24 = k + 34$; inversos $5k + 8 + 6 = 5k + 14$. El determinante es $(k + 34) - (5k + 14) = 20 - 4k$. Igualando a cero, $k = 5$.

c. Pendiente $\dfrac{8-2}{5-1} = \dfrac{3}{2}$ y recta $y - 2 = \frac{3}{2}(x - 1)$, es decir, $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$. Con $x = 3$: $y = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 5$, que es $B(3, 5)$.

d. $d(A, C) = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} \approx 7{,}2$ km.

Solución del ejercicio 20

a. Es el determinante del ejercicio 7: $(a - 1)^2(a + 2)$.

b. Hay soluciones no triviales si y solo si $a = 1$ o $a = -2$.

c. Con $a = -2$ el rango es 2: de $-2x + y + z = 0$ y $x - 2y + z = 0$, restando, $-3x + 3y = 0$, luego $x = y$ y $z = x$. Las soluciones son (t, t, t), $t \in \mathbb{R}$.

d. Con $a = 1$ las tres ecuaciones son $x + y + z = 0$ (rango 1). Las soluciones $(x, y, z) = (-s - t, s, t)$ forman un plano que pasa por el origen.