Soluciones del examen - Derivabilidad

Curso: 2 Bachillerato Ciencias · Duración: 60 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (4 puntos)

a. Pasa por $(1,0)$: $1+a=0$, $a=-1$ (0,5 puntos). Continuidad en 2: $4+2a=2b+c$, es decir, $2b+c=2$ (1 punto). Derivabilidad: $f'(2^-)=4+a=3$ y $f'(2^+)=b$, luego $b=3$ (1 punto) y $c=2-6=-4$ (0,5 puntos). Son tres condiciones para tres incógnitas: el punto, la continuidad y la igualdad de las derivadas laterales. Una función derivable es continua, por eso se exige primero la continuidad.

b. $f'(x)=2x-1$ si $x\leq 2$ y $f'(x)=3$ si $x>2$ (en $x=2$ las dos expresiones dan 3). Comprobación: $f(2)=4-2=2$ y $3\cdot 2-4=2$; los dos tramos coinciden. (1 punto)

Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

a. $f(0)=0$, $f'(x)=e^x(1+x)$, $f'(0)=1$. Tangente $y=x$; normal $y=-x$. La derivada se obtiene con la regla del producto: e^x+xe^x. La normal tiene pendiente $-\frac{1}{f'(0)}=-1$, y ambas rectas pasan por el origen porque $f(0)=0$. (2 puntos)

b. $e^x(1+x)=0$ solo si $x=-1$: punto $\left(-1,-\frac{1}{e}\right)$. Tangente horizontal significa pendiente nula. Como e^x nunca se anula, debe ser $1+x=0$. La ordenada es $f(-1)=-e^{-1}\approx -0{,}37$, que es el mínimo de la función.

c. $\tan\alpha=1$: $\alpha=45^\circ$. La pendiente de la tangente es la tangente trigonométrica de su ángulo de inclinación. La recta $y=x$ es la bisectriz del primer cuadrante. (1 punto)

Solución del ejercicio 3 (4 puntos)

a. $\frac{0}{0}$: $\dfrac{\sin x}{2x}$, otra vez $\frac{0}{0}$: $\dfrac{\cos x}{2}\to\dfrac{1}{2}$. Se aplica L'Hôpital dos veces, porque tras la primera derivación sigue la indeterminación. También puede usarse $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$, que da el mismo valor. (1,5 puntos)

b. $\infty\cdot 0$: $\dfrac{x^2}{e^x}$ ($\frac{\infty}{\infty}$). Derivando dos veces: $\dfrac{2x}{e^x}\to\dfrac{2}{e^x}\to 0$. Se transforma el producto en cociente para poder aplicar L'Hôpital. La exponencial crece más deprisa que cualquier potencia, por eso el límite es nulo. (1,5 puntos)

c. $\frac{0}{0}$: $\dfrac{1/x}{1}\to 1$. Al derivar: $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ y $(x-1)'=1$; en $x=1$ se obtiene 1. Este límite es justamente la derivada de $\ln x$ en $x=1$. (1 punto)

Solución del ejercicio 4 (4 puntos)

a. Polinómica, luego continua y derivable. $f(0) = 0$ y $f(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 0$. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$ en $c = 1 \in (0, \sqrt{3})$. Las hipótesis de Rolle son continuidad en $[0, \sqrt{3}]$, derivabilidad en $(0, \sqrt{3})$ y valores iguales en los extremos. La otra raíz, $c = -1$, no pertenece al intervalo y se descarta. (2 puntos)

b. g es continua en $[1, 4]$ y derivable en $(1, 4)$. $\dfrac{2-1}{4-1} = \dfrac{1}{3}$ y $g'(c) = \dfrac{1}{2\sqrt{c}} = \dfrac{1}{3}$: $\sqrt{c} = \frac{3}{2}$, $c = \frac{9}{4} \in (1, 4)$. La raíz cuadrada no es derivable en 0, pero 0 no está en el intervalo. Se iguala la derivada a la pendiente de la secante: $2\sqrt{c} = 3$. El punto $c = 2{,}25$ está entre 1 y 4, como garantiza el teorema.

Solución del ejercicio 5 (4 puntos)

a. $h(0) = 25$ m. $h'(t) = -10t + 20$, $h'(0) = 20$ m/s. La altura inicial es el valor en $t = 0$; la velocidad es la derivada de la posición. (1 punto)

b. $h'(t) = 0$ en $t = 2$ s; $h(2) = -20 + 40 + 25 = 45$ m. En el punto más alto la velocidad se anula. La segunda derivada, $h'' = -10$, es negativa: se trata de un máximo, y coincide con la aceleración de la gravedad aproximada.

c. $-5t^2 + 20t + 25 = 0$, $t^2 - 4t - 5 = 0$, $t = 5$ s (la otra raíz, -1, no vale). $h'(5) = -30$ m/s: cae a 30 m/s (108 km/h). Se divide entre -5 y se factoriza: $(t - 5)(t + 1) = 0$. El signo negativo indica que el cohete baja; $30 \cdot 3{,}6 = 108$ km/h. (1,5 puntos)

d. $\dfrac{h(5) - h(0)}{5} = \dfrac{0 - 25}{5} = -5$ m/s. Sale negativa porque la posición final, el suelo, está por debajo de la inicial, la terraza. (0,5 puntos)