Apuntes - Derivabilidad

Curso: 2 Bachillerato Ciencias

Actividad de introducción: el radar que no mide la velocidad

En muchas autovías de España hay radares de tramo. No miden la velocidad de los coches en ningún punto: solo registran la hora a la que cada coche pasa por dos cámaras separadas varios kilómetros. Si un coche recorre 30 km en 12 minutos, su velocidad media es de 150 km/h, y la multa llega aunque al pasar por las cámaras fuera despacio. ¿Por qué es justa la multa? Porque una función derivable que va de un valor a otro tiene que alcanzar, en algún instante, una pendiente igual a la pendiente media. Es el teorema del valor medio, uno de los resultados de este tema. Piensa también: ¿qué significa que una carretera no tenga «esquinas»? ¿Por qué la gráfica de un valor absoluto tiene un pico donde no se puede trazar la tangente? Para responder estudiarás las derivadas laterales, la relación entre continuidad y derivabilidad, los teoremas de Rolle y del valor medio y la regla de L'Hôpital, que convierte muchos límites difíciles en cálculos sencillos.

Derivada y derivadas laterales

Definición: derivada y derivadas laterales

La **derivada** de f en a es $f'(a) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, la pendiente de la tangente y la tasa de variación instantánea. Las **derivadas laterales** $f'(a^-)$ y $f'(a^+)$ usan $h \to 0^-$ y $h \to 0^+$. f es derivable en a si ambas existen, son finitas y coinciden. **Derivable implica continua**, pero no al revés: $f(x) = |x|$ es continua en 0 y tiene un punto anguloso ($f'(0^-) = -1$, $f'(0^+) = 1$).

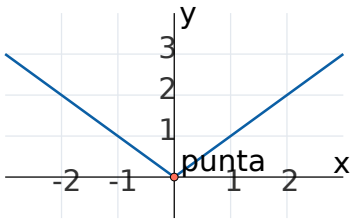


Figura: $|x|$ es continua en 0 pero no derivable (punto anguloso).

Ejemplo 1

$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \le 1 \\ 2x-1 & x > 1 \end{cases}$. Continua en 1: $1 = 1$. Derivadas: por la izquierda $2x = 2$; por la derecha 2. Coinciden: f es derivable en 1 con $f'(1) = 2$.

Ejemplo 2

$f(x)=\begin{cases} ax^2+b & x\leq 1 \\ \frac{1}{x} & x>1 \end{cases}$ derivable en 1. Continuidad: $a+b=1$. Derivabilidad: $2a=-1$. Así $a=-\frac{1}{2}$ y $b=\frac{3}{2}$.

Teoremas de Rolle y del valor medio

Definición: teoremas de Rolle y del valor medio

Rolle. Si f es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $f(a)=f(b)$, existe $c\in(a,b)$ con $f'(c)=0$ (tangente horizontal). **Lagrange o del valor medio.** Si f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), existe $c\in(a,b)$ con $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$: hay un punto cuya tangente es paralela a la secante. Consecuencias: si $f'=0$ en un intervalo, f es constante; si $f'>0$, es creciente; y de Rolle se deduce que entre dos raíces de f hay una raíz de f' (útil para probar que una ecuación tiene a lo sumo cierto número de soluciones).

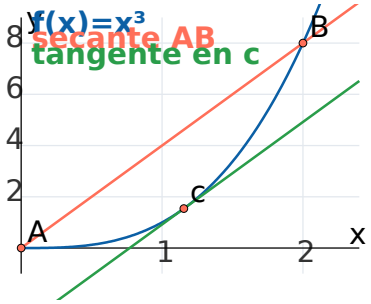


Figura: para $f(x)=x^3$ en $[0,2]$, la tangente en $c=\frac{2}{\sqrt{3}}$ es paralela a la secante AB.

Ejemplo 3

$f(x)=x^3$ en $[0,2]$: $\frac{f(2)-f(0)}{2}=4$ y $f'(c)=3c^2=4\Rightarrow c=\frac{2}{\sqrt{3}}\approx 1{,}15\in(0,2)$.

Regla de L'Hôpital

Definición: regla de L'Hôpital

Si $\lim f=\lim g=0$ (o ambas $\pm\infty$), f y g son derivables cerca de a y existe $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Se puede repetir si sigue la indeterminación. Las demás formas se reducen a estas: $0\cdot\infty$ pasando un factor al denominador; $\infty-\infty$ con denominador común; 1^∞, 0^0, ∞^0 con logaritmos: $\lim f^g=e^{\lim g\ln f}$.

Ejemplo 4

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}:\frac{0}{0}.\to\lim\frac{e^x-1}{2x}\ (\frac{0}{0})\to\lim\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}.$

Ejemplo 5

$\lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim\frac{\ln x}{1/x}\ (\frac{-\infty}{\infty})=\lim\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim(-x)=0.$

Ejemplo 6

$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}=e^L$ con $L=\lim\frac{\ln\cos x}{x^2}=\lim\frac{-\tan x}{2x}=-\frac{1}{2}$. Resultado $e^{-1/2}$.

Errores frecuentes

¡Atención!

- Aplicar L'Hôpital sin que haya indeterminación $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.
- Derivar el cociente como $\left(\frac{f}{g}\right)'$ en lugar de derivar numerador y denominador por separado.
- Olvidar comprobar la continuidad antes de hablar de derivabilidad en una función a trozos.
- Usar Rolle o Lagrange sin comprobar la continuidad en el intervalo cerrado.

Tangente, normal y tasa de variación

Definición: tangente, normal y tasa de variación

La **recta tangente** a $y=f(x)$ en $x=a$ es $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ y la **normal** es perpendicular a ella: $y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$ si $f'(a)\neq 0$. La derivada mide la **tasa de variación instantánea**: si $s(t)$ es la posición, $s'(t)$ es la velocidad.

Ejemplo 7

Para $f(x)=x^3-2x$ en $a=1$: $f(1)=-1$, $f'(x)=3x^2-2$, $f'(1)=1$. Tangente: $y+1=x-1\Rightarrow y=x-2$. Normal: $y+1=-(x-1)\Rightarrow y=-x$.

Ejemplo 8

¿Para qué valor de k cumple Rolle $f(x)=x^2+kx$ en $[0,2]$? Hace falta $f(0)=f(2)$: $0=4+2k\Rightarrow k=-2$. Entonces $f'(x)=2x-2=0\Rightarrow c=1$.

Cómo se plantean estos ejercicios en la PAU

Observación

Los problemas combinan una función a trozos con parámetros (continuidad y derivabilidad en el punto de unión), una aplicación de un teorema (Bolzano, Rolle o valor medio, siempre justificando las hipótesis) y uno o dos límites resueltos con L'Hôpital. Escribe explícitamente las hipótesis de cada teorema antes de aplicarlo: «f es continua en $[a,b]$ por ser un polinomio, derivable en (a,b) y $f(a)=f(b)$». Esa frase vale parte de la puntuación. En los límites, indica la indeterminación en cada paso ($\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$) para justificar el uso de la regla.

Método: estudiar la derivabilidad en un punto

1. Comprueba la continuidad en el punto.
2. Calcula las derivadas laterales con las expresiones de cada trozo.
3. Si coinciden, f es derivable y $f'(a)$ es ese valor.
4. Para límites indeterminados, comprueba las hipótesis y aplica L'Hôpital.

Derivabilidad de funciones a trozos

Método: estudiar una función a trozos con parámetros

1. Comprueba que cada trozo es derivable en su intervalo abierto (polinomios, exponenciales y senos lo son siempre; cocientes y logaritmos, donde están definidos).
2. En cada punto de unión, impón primero la continuidad: los límites laterales deben coincidir con el valor de la función.
3. Después impón que coincidan las derivadas laterales, calculadas derivando cada trozo y sustituyendo el punto.
4. Resuelve el sistema de ecuaciones que se obtiene para los parámetros.
5. Comprueba el resultado: sustituye los valores y verifica las dos condiciones.

Ejemplo 9

Un ingeniero une la recta $y=0$ y la recta $y=x-1$ con una curva $y=ax^2+bx^3$ entre $x=0$ y $x=2$. ¿Qué curva consigue un enlace suave?

En $x=0$ la curva vale 0 y su derivada también, así que el empalme es suave sin condiciones. En $x=2$ la continuidad exige $4a+8b=1$ y la derivabilidad exige $4a+12b=1$. Restando, $b=0$ y $a=\frac{1}{4}$: la curva es la parábola $y=\frac{1}{4}x^2$. Así trazan los ingenieros las transiciones entre tramos rectos y curvos de carreteras y vías de tren, aunque en la práctica usan curvas más elaboradas llamadas clotoides.

¡Atención!

Para estudiar la derivabilidad en un punto de unión no basta con comparar las derivadas laterales: primero hay que comprobar la continuidad. Una función con un salto nunca es derivable, aunque las fórmulas de las derivadas de los dos trozos den el mismo número en ese punto. Tampoco se puede aplicar la regla de L'Hôpital sin comprobar antes que el límite es $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$: aplicada a un límite que no es indeterminado da resultados falsos. Y en L'Hôpital se derivan el numerador y el denominador por separado, nunca el cociente completo.

Los teoremas de Rolle y del valor medio en acción

Propiedad: consecuencias del teorema del valor medio

Del teorema del valor medio se deducen resultados muy útiles. Si la derivada es positiva en un intervalo, la función es creciente en él; si es negativa, decreciente; y si la derivada es cero en todo el intervalo, la función es constante. Además, combinando Rolle con Bolzano se puede contar el número exacto de soluciones de una ecuación: Bolzano da un mínimo, porque garantiza una raíz en cada cambio de signo, y Rolle da un máximo, porque entre dos raíces consecutivas de f siempre hay una raíz de f'. Si f' no se anula nunca, f tiene como mucho una raíz.

Ejemplo 10

¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $x^3 + 3x - 5 = 0$?

La función $g(x) = x^3 + 3x - 5$ es continua, $g(1) = -1$ y $g(2) = 9$, así que por Bolzano hay al menos una raíz entre 1 y 2. Su derivada, $3x^2 + 3$, es siempre positiva y no se anula nunca. Si hubiera dos raíces, por Rolle la derivada se anularía entre ellas, lo que es imposible. La ecuación tiene exactamente una solución.

Ejemplo 11

Calcula $\lim_{k \to 0} \frac{9{,}8}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$.

Es una indeterminación del tipo cero entre cero en la variable k. Al derivar el numerador y el denominador respecto de k se obtiene $9{,}8\,te^{-kt}$ entre 1, que tiende a $9{,}8t$. El modelo de un paracaidista con rozamiento se convierte en la caída libre cuando el rozamiento desaparece, lo cual confirma que el modelo es coherente.

Observación: un poco de historia

Michel Rolle, matemático francés del siglo XVII, publicó su teorema en 1691 para polinomios, y curiosamente era un crítico del cálculo infinitesimal. La regla de L'Hôpital aparece en el primer libro de texto de cálculo, publicado por el marqués de L'Hôpital en 1696, aunque la descubrió su profesor Johann Bernoulli, a quien el

marqués pagaba por enseñarle sus resultados. El teorema del valor medio en su forma actual se debe a Lagrange y a Cauchy. Hoy se usa en ingeniería para estimar errores y en tráfico, como has visto, para justificar las multas de los radares de tramo. También es la base de muchos métodos numéricos que usan las calculadoras y los ordenadores para aproximar raíces de ecuaciones, como el método de Newton, que en cada paso sustituye la curva por su recta tangente y busca dónde corta esa recta al eje de abscisas. Con pocas iteraciones se obtienen muchas cifras exactas.

El consejo de Otto

En funciones a trozos hay dos pasos y siempre en este orden: primero continuidad (igualar valores), después derivabilidad (igualar derivadas). Si falla el primero, ni mires el segundo.