Ejercicios - Derivabilidad

Curso: 2 Bachillerato Ciencias · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – La derivada por la definición

La derivada de f en a es $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, la pendiente de la recta tangente en ese punto.

a. Calcula $f'(2)$ para $f(x) = x^2 - 3x$ con la definición.
b. Calcula $g'(1)$ para $g(x) = \dfrac{1}{x}$ con la definición.
c. Comprueba los resultados con las reglas de derivación.

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Repaso de las reglas de derivación

Deriva aplicando las reglas del producto, del cociente y de la cadena, y simplifica.

a. $f(x) = x^2 e^x$
b. $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
c. $h(x) = \sin(3x^2 + 1)$
d. $k(x) = \sqrt{x^2 + 5}$

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Derivadas laterales

Una función es derivable en a si las derivadas laterales $f'(a^-)$ y $f'(a^+)$ existen y coinciden. Si no coinciden, la gráfica tiene un punto anguloso.

a. Estudia la derivabilidad de $f(x) = |x - 2|$ en $x = 2$.
b. Estudia la continuidad y la derivabilidad en $x = 1$ de $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.
c. ¿Por qué toda función derivable es continua, pero no al revés?

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Derivabilidad con dos parámetros

Se considera $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2bx - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

a. Escribe la condición de continuidad en $x = 1$.
b. Escribe la condición de derivabilidad en $x = 1$.
c. Halla a y b para que f sea derivable en $\mathbb{R}$.
d. Escribe $f'(x)$ con esos valores.

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Recta tangente y recta normal

La recta tangente a f en $x = a$ es $y - f(a) = f'(a)(x - a)$; la normal es perpendicular a ella, con pendiente $-\dfrac{1}{f'(a)}$. Sea $f(x) = x^3 - 2x$.

a. Halla la recta tangente en $x = 1$.
b. Halla la recta normal en $x = 1$.
c. Halla los puntos en que la tangente es paralela a $y = 10x$.
d. ¿Hay puntos con tangente horizontal?

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – El teorema de Rolle

Teorema de Rolle: si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, existe $c \in (a, b)$ con $f'(c) = 0$.

a. Comprueba que $f(x) = x^2 - 4x + 1$ cumple las hipótesis en $[0, 4]$ y halla c.
b. ¿Se puede aplicar a $g(x) = |x|$ en $[-1, 1]$? ¿Existe c con $g'(c) = 0$?
c. Interpreta el teorema geométricamente.

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – El teorema del valor medio

Teorema del valor medio (Lagrange): si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), existe $c \in (a, b)$ con $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

a. Comprueba las hipótesis para $f(x) = x^3$ en $[0, 2]$.
b. Halla el punto c que garantiza el teorema.
c. Interpreta el resultado geométricamente.

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – La regla de L'Hôpital

Si $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ es $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ y existe $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, los dos límites coinciden. Calcula:

a. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$
b. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$
c. $\lim_{x\to 0^+} x \ln x$
d. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – La aceleración de un coche

En una pista de pruebas de Montmeló, la posición de un coche (en metros) a los t segundos de arrancar es $s(t) = 6t^2 - \frac{1}{3}t^3$, para $0 \le t \le 12$.

a. Calcula la velocidad media en los 6 primeros segundos.
b. Calcula la velocidad instantánea $v(t) = s'(t)$ y su valor en $t = 6$.
c. Calcula la aceleración $a(t) = v'(t)$. ¿Cuándo deja de acelerar?
d. Expresa la velocidad máxima en km/h.

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – El coste marginal de una bicicleta

Una fábrica de bicicletas de Éibar tiene un coste diario $C(x) = 0{,}01x^2 + 5x + 200$ euros por fabricar x unidades de un componente. El coste marginal es $C'(x)$ y aproxima el coste de fabricar una unidad más.

a. Calcula el coste de fabricar 100 unidades.
b. Calcula el coste marginal para $x = 100$.
c. Calcula el coste real de fabricar la unidad 101 y compáralo.
d. ¿Para qué producción el coste marginal es de 9 €?

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – El radar de tramo

En una autovía de Castilla-La Mancha hay un radar de tramo: dos cámaras separadas 30 km registran a qué hora pasa cada coche. Un coche pasa por la primera a las 10:00 y por la segunda a las 10:15. La velocidad máxima es de 120 km/h.

a. Calcula la velocidad media del coche en el tramo.
b. Justifica con el teorema del valor medio que en algún instante iba exactamente a esa velocidad.
c. ¿Puede la Dirección General de Tráfico multarlo? ¿Por qué el radar de tramo no

necesita medir la velocidad en ningún punto?
d. ¿Cuál es el tiempo mínimo para recorrer el tramo sin superar el límite?

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – El tobogán del parque acuático

El perfil de un tobogán de un parque acuático de Benidorm es $f(x) = \frac{1}{8}x^2 - 2x + 8$ para $0 \leq x \leq 8$ (metros; $f(x)$ es la altura).

a. Calcula la altura de salida y la de llegada.
b. Calcula la pendiente del tobogán en $x = 4$ y el ángulo que forma con la horizontal.
c. Comprueba que la llegada al agua es horizontal. ¿Por qué es importante?
d. Halla la recta tangente en $x = 4$.

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – El crecimiento de las bacterias

En un laboratorio de microbiología de Salamanca, un cultivo tiene $N(t) = 1\,000e^{0{,}2t}$ bacterias a las t horas.

a. Calcula la tasa de variación media en las primeras 5 horas.
b. Calcula la velocidad de crecimiento $N'(t)$ y su valor en $t = 5$.
c. Comprueba que $N'(t) = 0{,}2N(t)$ e interprétalo.
d. ¿Cuándo crece a un ritmo de 400 bacterias por hora?

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – El globo de la fiesta

Para una fiesta de cumpleaños se infla un globo esférico. Su volumen es $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ (cm³) cuando el radio mide r cm.

a. Calcula $V'(r)$ e interpreta el resultado (compáralo con el área de la esfera).
b. Calcula la tasa de variación media del volumen cuando el radio pasa de 10 a 11 cm.
c. Calcula $V'(10)$ y compáralo.
d. Si el radio aumenta 0,5 cm por segundo, ¿a qué ritmo aumenta el volumen cuando $r = 10$ cm?

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – Problema: el enlace de dos carreteras

Unos ingenieros de Galicia diseñan el enlace entre una carretera recta que sigue el eje X (para $x \leq 0$) y otra recta $y = x - 1$ (para $x \geq 2$), con unidades en hectómetros. Entre

ellas se coloca una curva $y = ax^2 + bx^3$ para $0 \leq x \leq 2$. Para que los coches no den tirones, la función completa debe ser continua y derivable (la dirección no puede cambiar de golpe).

Tramo	Intervalo	Ecuación
Recta 1	x ≤ 0	y = 0
Curva	0 ≤ x ≤ 2	y = ax² + bx³
Recta 2	x ≥ 2	y = x − 1

a. Escribe la función completa $f(x)$ a trozos.
b. Comprueba que en $x = 0$ la función es continua y derivable para cualquier a y b.
c. Escribe las condiciones de continuidad y derivabilidad en $x = 2$.
d. Halla a y b.
e. Comprueba el resultado y explica qué pasaría con un enlace solo continuo.

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – Problema: el paracaidista

Un paracaidista salta desde una avioneta sobre Empuriabrava. Con rozamiento del aire, su velocidad (m/s) a los t segundos es $v(t) = \frac{9{,}8}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$, donde $k > 0$ depende de la postura y del paracaídas. En caída libre, sin rozamiento, sería $v = 9{,}8t$.

a. Con $k = 0{,}2$ (sin abrir el paracaídas), calcula la velocidad a los 5 y a los 10 segundos.
b. Calcula $\lim_{t \to +\infty} v(t)$ (velocidad límite) para $k = 0{,}2$ y exprésala en km/h.
c. Al abrir el paracaídas, $k = 1{,}6$. Calcula la nueva velocidad límite.
d. Con la regla de L'Hôpital, calcula $\lim_{k \to 0} v(t)$ para un t fijo e interpreta el resultado.
e. Calcula la aceleración $v'(t)$ y comprueba que en $t = 0$ vale 9,8 m/s².

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – Problema: contar las soluciones de una ecuación

Para saber cuántas soluciones tiene una ecuación $f(x) = 0$ se combinan dos teoremas: Bolzano asegura que hay al menos una raíz en cada cambio de signo y Rolle limita el número máximo, porque entre dos raíces de f hay siempre una raíz de f'. Se considera $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$.

a. Completa una tabla de valores de f en $x = -2, -1, 0, 1, 2$.
b. Deduce con Bolzano que hay al menos tres raíces y sitúalas.
c. Calcula f' y sus raíces.
d. Usa el teorema de Rolle para demostrar que no hay más de tres raíces.
e. ¿Cuántas raíces tiene $g(x) = x^3 + 3x - 5$? Justifícalo.

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Problema: los faros en la curva

Una calle de un barrio de Zaragoza tiene una curva con forma de parábola $y = x^2$ (decámetros). Un coche aparcado en el punto $P(1, -3)$, fuera de la curva, tiene los faros encendidos. Los rayos que rozan la curva son las rectas tangentes a la parábola que pasan por P.

a. Escribe la ecuación de la tangente a $y = x^2$ en un punto genérico (x_0, x_0^2).
b. Impón que pase por P y halla los puntos de tangencia.
c. Escribe las dos rectas tangentes.
d. Comprueba que P está en las dos rectas.
e. ¿Desde qué puntos del plano no se puede trazar ninguna tangente a la parábola? Razona.

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Problema: derivabilidad con valores absolutos

Las funciones con valor absoluto se escriben a trozos antes de derivar. Se consideran $f(x) = |x^2 - 4|$ y $g(x) = x|x|$.

Función	Punto	Derivada por la izquierda	Derivada por la derecha
f	x = −2		
f	x = 2		
g	x = 0		

a. Escribe f a trozos.
b. Estudia la derivabilidad de f en $x = 2$ y en $x = -2$.
c. Escribe g a trozos y estudia su derivabilidad en $x = 0$.
d. Calcula $g'(x)$ y comprueba que $g'(x) = 2|x|$.
e. Completa la tabla de las derivadas laterales.

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: desigualdades con el valor medio

Para ir más allá. El teorema del valor medio permite demostrar desigualdades.

a. Demuestra que $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$ para todo a, b.
b. Demuestra que $\ln(1 + x)$ para todo $x > 0$.
c. Usa el apartado anterior para acotar $\ln 1{,}1$ y compáralo con el valor de la calculadora.