Soluciones - Derivabilidad

Curso: 2 Bachillerato Ciencias

Solución del ejercicio 1

Para calcular la derivada por la definición se escribe el cociente incremental, es decir, el incremento de la función dividido entre el incremento de la variable. Se simplifica algebraicamente para quitar la indeterminación y después se calcula el límite cuando el incremento tiende a cero.

a. $f(2+h)-f(2)=(4+4h+h^2-6-3h)-(-2)=h+h^2$. $\dfrac{h+h^2}{h}=1+h\to 1$. $f'(2)=1$.

b. $\dfrac{\frac{1}{1+h}-1}{h}=\dfrac{1-(1+h)}{h(1+h)}=\dfrac{-1}{1+h}\to -1$. $g'(1)=-1$.

c. $f'(x)=2x-3$, $f'(2)=1$. $g'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$, $g'(1)=-1$.

Solución del ejercicio 2

Antes de derivar conviene identificar la estructura de cada función: un producto, un cociente o una composición. La regla de la cadena se aplica siempre que dentro de una función aparece otra distinta de x, multiplicando por la derivada de la función interior.

a. Producto: $f'(x)=2xe^x+x^2e^x=e^x(x^2+2x)$.

b. Cociente: $g'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

c. Cadena: $h'(x)=\cos(3x^2+1)\cdot 6x$.

d. Cadena: $k'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+5}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+5}}$.

Solución del ejercicio 3

Para estudiar la derivabilidad en un punto se escriben la función a trozos y se calculan las derivadas por la izquierda y por la derecha. Antes hay que comprobar la continuidad, porque sin ella no puede haber derivada.

a. $f(x)=2-x$ si x y $f(x)=x-2$ si $x\geq 2$. Es continua ($f(2)=0$). $f'(2^-)=-1$ y $f'(2^+)=1$: no es derivable (punto anguloso).

b. Continuidad: $g(1)=1$ y $\lim_{x\to 1^+}(2x-1)=1$. Es continua. Derivadas: $g'(1^-)=2\cdot 1=2$ y $g'(1^+)=2$. Es derivable con $g'(1)=2$.

c. Si existe la derivada, $f(a+h)-f(a)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot h\to f'(a)\cdot 0=0$, así que f

es continua. El valor absoluto del apartado a) es continuo y no derivable.

Solución del ejercicio 4

Una función a trozos es derivable en el punto de unión si es continua y sus derivadas laterales coinciden. Cada condición da una ecuación, y con las dos se forma un sistema para los dos parámetros.

a. $f(1) = a + b - 1$ y $\lim_{x \to 1^+} f = 2b - 2$: $a + b - 1 = 2b - 2$, es decir, $a - b = -1$.
b. $f'(1^-) = 2a + b$ y $f'(1^+) = 2b$: $2a + b = 2b$, es decir, $b = 2a$.
c. Sustituyendo, $a - 2a = -1$: $a = 1$, $b = 2$. Comprobación: $f(1) = 2$ por los dos lados y las dos derivadas valen 4.
d. $f'(x) = 2x + 2$ si $x \leq 1$ y $f'(x) = 4$ si $x > 1$.

Solución del ejercicio 5

La pendiente de la recta tangente es la derivada en el punto; con ella y el punto se escribe la ecuación punto-pendiente. La normal tiene pendiente opuesta e inversa, y las tangentes paralelas a una recta tienen su misma pendiente.

a. $f(1) = -1$, $f'(x) = 3x^2 - 2$, $f'(1) = 1$. Tangente: $y + 1 = x - 1$, es decir, $y = x - 2$.
b. Pendiente -1: $y + 1 = -(x - 1)$, es decir, $y = -x$.
c. $3x^2 - 2 = 10$, $x^2 = 4$, $x = \pm 2$. Puntos $(2, 4)$ y $(-2, -4)$.
d. $3x^2 - 2 = 0$, $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \approx \pm 0{,}816$.

Solución del ejercicio 6

Para aplicar el teorema de Rolle se comprueban las tres hipótesis: continuidad en el intervalo cerrado, derivabilidad en el abierto y valores iguales en los extremos. Si alguna falla, el teorema no garantiza nada.

a. Es polinómica (continua y derivable) y $f(0) = f(4) = 1$. $f'(x) = 2x - 4 = 0$ en $c = 2 \in (0, 4)$.
b. No: g no es derivable en 0. Además $g'(x) = \pm 1$ nunca es 0, así que la conclusión falla.
c. Si una curva suave sale y llega a la misma altura, en algún punto intermedio tiene tangente horizontal.

Solución del ejercicio 7

El teorema del valor medio afirma que la pendiente de la tangente en algún punto interior es igual a la pendiente media en el intervalo. Se calcula esa pendiente media y se resuelve la ecuación que iguala la derivada a ella.

a. f es polinómica: continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.
b. $\dfrac{8-0}{2} = 4$ y $f'(c) = 3c^2 = 4$: $c = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \approx 1{,}155 \in (0, 2)$ (la raíz negativa no está en el intervalo).
c. En c la recta tangente es paralela a la cuerda que une $(0, 0)$ y $(2, 8)$.

Solución del ejercicio 8

Antes de aplicar la regla de L'Hôpital hay que comprobar que el límite es cero entre cero o infinito entre infinito. Si al derivar sigue siendo indeterminado, se puede aplicar otra vez; un producto cero por infinito se transforma antes en un cociente.

a. $\frac{0}{0}$: $\dfrac{e^x - 1}{2x}$, de nuevo $\frac{0}{0}$: $\dfrac{e^x}{2} \to \dfrac{1}{2}$.
b. $\frac{0}{0}$ tres veces: $\dfrac{\cos x - 1}{3x^2} \to \dfrac{-\sin x}{6x} \to \dfrac{-\cos x}{6} \to -\dfrac{1}{6}$.
c. $0 \cdot \infty$: se escribe $\dfrac{\ln x}{1/x}$ ($\frac{\infty}{\infty}$). Derivando: $\dfrac{1/x}{-1/x^2} = -x \to 0$.
d. $\frac{\infty}{\infty}$: $\dfrac{1/x}{1} \to 0$. El logaritmo crece más despacio que x.

Solución del ejercicio 9

La velocidad media es el cambio de posición dividido entre el tiempo. La velocidad instantánea es la derivada de la posición y la aceleración es la derivada de la velocidad; cuando la aceleración se anula, la velocidad alcanza su máximo.

a. $\dfrac{s(6) - s(0)}{6} = \dfrac{216 - 72}{6} = 24$ m/s.
b. $v(t) = 12t - t^2$; $v(6) = 72 - 36 = 36$ m/s.
c. $a(t) = 12 - 2t$; se anula en $t = 6$ s: a partir de ahí frena.
d. La velocidad máxima es $v(6) = 36$ m/s $= 36 \cdot 3{,}6 = 129{,}6$ km/h.

Solución del ejercicio 10

El coste marginal es la derivada del coste total y aproxima lo que cuesta fabricar una unidad más. Para comprobar la aproximación se calcula la diferencia exacta entre el coste de 101 unidades y el de 100.

a. $C(100) = 100 + 500 + 200 = 800$ €.
b. $C'(x) = 0{,}02x + 5$; $C'(100) = 7$ €.
c. $C(101) - C(100) = (102{,}01 + 505 + 200) - 800 = 7{,}01$ €. La derivada da una muy buena aproximación.
d. $0{,}02x + 5 = 9$, $x = 200$ unidades.

Solución del ejercicio 11

a. $\dfrac{30\text{ km}}{0{,}25\text{ h}} = 120$ km/h.
b. La posición $s(t)$ es continua y derivable (el coche no salta ni cambia de velocidad de golpe). Por el teorema del valor medio existe c con $s'(c) = \frac{30}{0{,}25} = 120$ km/h.
c. No: 120 km/h no supera el límite. Si la media lo superara, el teorema asegura que en algún momento la velocidad lo superó, aunque no se sepa cuándo.
d. $\frac{30}{120} = 0{,}25$ h, es decir, 15 minutos.

Solución del ejercicio 12

La pendiente del tobogán en cada punto es la derivada del perfil, y su arcotangente da el ángulo con la horizontal. Que la derivada sea cero en la llegada significa que la tangente es horizontal y el bañista entra suavemente.

a. $f(0) = 8$ m y $f(8) = 8 - 16 + 8 = 0$ m.
b. $f'(x) = \frac{1}{4}x - 2$, $f'(4) = -1$. El ángulo cumple $\tan\alpha = -1$: baja con una inclinación de 45°.
c. $f'(8) = 2 - 2 = 0$: la tangente es horizontal y el bañista entra en el agua deslizándose, sin golpearse.
d. $f(4) = 2$: $y - 2 = -(x - 4)$, es decir, $y = -x + 6$.

Solución del ejercicio 13

La tasa de variación media compara los valores en dos instantes; la instantánea es la derivada. En un crecimiento exponencial la derivada es proporcional a la propia función, y para hallar un instante se resuelve una ecuación exponencial con logaritmos.

a. $\dfrac{N(5) - N(0)}{5} = \dfrac{1\,000e - 1\,000}{5} \approx 343{,}7$ bacterias por hora.
b. $N'(t) = 200e^{0{,}2t}$; $N'(5) = 200e \approx 543{,}7$ bacterias por hora.
c. $N'(t) = 0{,}2 \cdot 1\,000e^{0{,}2t} = 0{,}2N(t)$: la velocidad de crecimiento es proporcional al tamaño del cultivo.
d. $200e^{0{,}2t} = 400$, $e^{0{,}2t} = 2$, $t = 5\ln 2 \approx 3{,}47$ h.

Solución del ejercicio 14

a. $V'(r) = 4\pi r^2$, que es el área de la esfera: al aumentar un poco el radio, se añade una capa fina de grosor Δr y volumen aproximado $4\pi r^2 \Delta r$.
b. $\dfrac{V(11) - V(10)}{1} = \frac{4}{3}\pi(1\,331 - 1\,000) = \frac{1\,324}{3}\pi \approx 1386{,}5$ cm³ por cm.
c. $V'(10) = 400\pi \approx 1256{,}6$ cm³ por cm, algo menor porque el ritmo crece con el

radio.

d. Por la regla de la cadena, $\dfrac{dV}{dt} = V'(r)\dfrac{dr}{dt} = 400\pi \cdot 0{,}5 = 200\pi \approx 628{,}3$ cm³/s.

Solución del ejercicio 15

a. $f(x) = 0$ si x; $f(x) = ax^2 + bx^3$ si $0 \le x \le 2$; $f(x) = x - 1$ si $x > 2$.
b. $f(0) = 0$ por los dos lados. Derivadas: 0 a la izquierda y $2a \cdot 0 + 3b \cdot 0 = 0$ a la derecha. Coinciden siempre.
c. Continuidad: $4a + 8b = 2 - 1 = 1$. Derivabilidad: $f'(2^-) = 4a + 12b$ y $f'(2^+) = 1$, luego $4a + 12b = 1$.
d. Restando: $4b = 0$, $b = 0$, y $a = \frac{1}{4}$. La curva es $y = \frac{1}{4}x^2$.
e. $\frac{1}{4} \cdot 4 = 1 = 2 - 1$ y $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$. Si solo fuera continua, en el empalme habría un ángulo y el conductor tendría que girar el volante de golpe.

Solución del ejercicio 16

a. $v(5) = 49(1 - e^{-1}) \approx 31{,}0$ m/s y $v(10) = 49(1 - e^{-2}) \approx 42{,}4$ m/s.
b. $e^{-0{,}2t} \to 0$: $v \to \frac{9{,}8}{0{,}2} = 49$ m/s $= 176{,}4$ km/h.
c. $\frac{9{,}8}{1{,}6} = 6{,}125$ m/s, unos 22 km/h: el aterrizaje es seguro.
d. Es $\frac{0}{0}$ en la variable k. Derivando respecto de k: $\dfrac{9{,}8\,te^{-kt}}{1} \to 9{,}8t$. Sin rozamiento se recupera la caída libre.
e. $v'(t) = \dfrac{9{,}8}{k} \cdot ke^{-kt} = 9{,}8e^{-kt}$, que en $t = 0$ vale 9,8 m/s²: al principio el aire apenas frena.

Solución del ejercicio 17

a. $f(-2) = -3$, $f(-1) = 5$, $f(0) = 1$, $f(1) = -3$, $f(2) = 5$.
b. Hay cambios de signo en $(-2, -1)$, $(0, 1)$ y $(1, 2)$: al menos una raíz en cada uno.
c. $f'(x) = 6x^2 - 6 = 0$ en $x = \pm 1$.
d. Si hubiera cuatro raíces, por Rolle f' tendría al menos tres raíces entre ellas, pero solo tiene dos. Hay exactamente tres.
e. $g(1) = -1$ y $g(2) = 9 > 0$: al menos una raíz en $(1, 2)$. $g'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ nunca se anula, así que no puede haber dos raíces: exactamente una.

Solución del ejercicio 18

La tangente en un punto genérico de la parábola se escribe con la derivada. Imponer que pase por el punto exterior da una ecuación de segundo grado cuyas soluciones

son los puntos de tangencia.

a. $y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0)$, es decir, $y = 2x_0x - x_0^2$.
b. $-3 = 2x_0 - x_0^2$, $x_0^2 - 2x_0 - 3 = 0$, $x_0 = 3$ o $x_0 = -1$. Puntos $(3, 9)$ y $(-1, 1)$.
c. $y = 6x - 9$ e $y = -2x - 1$.
d. $6 - 9 = -3$ y $-2 - 1 = -3$.
e. Desde los puntos interiores ($y > x^2$): la ecuación $x_0^2 - 2ax_0 + b = 0$ tiene discriminante $4a^2 - 4b$ si $b > a^2$.

Solución del ejercicio 19

Las funciones con valor absoluto se reescriben a trozos según el signo de lo que hay dentro. En los puntos donde cambia la expresión se comparan las derivadas laterales para decidir si hay un punto anguloso.

a. $f(x) = x^2 - 4$ si $x \leq -2$ o $x \geq 2$; $f(x) = 4 - x^2$ si -2.
b. En $x = 2$: $f'(2^-) = -4$ y $f'(2^+) = 4$: no derivable. En $x = -2$: $f'(-2^-) = -4$ y $f'(-2^+) = 4$: no derivable. Son dos puntos angulosos.
c. $g(x) = -x^2$ si x y $g(x) = x^2$ si $x \geq 0$. $g'(0^-) = 0 = g'(0^+)$: es derivable con $g'(0) = 0$.
d. $g'(x) = -2x$ si x y $2x$ si $x \geq 0$, que es $2|x|$.
e. f: en -2, -4 y 4; en 2, -4 y 4. g: en 0, 0 y 0.

Solución del ejercicio 20

En cada apartado se aplica el teorema del valor medio a una función conocida en un intervalo adecuado, y se acota la derivada en el punto intermedio. Así se obtiene la desigualdad pedida sin necesidad de calcular ese punto.

a. Por el valor medio en $[a, b]$: $\sin a - \sin b = \cos c\,(a - b)$ y $|\cos c| \leq 1$.
b. En $[0, x]$: $\ln(1 + x) - \ln 1 = \dfrac{1}{1 + c}\,x$ con 0, y $\dfrac{1}{1 + c}$, luego $\ln(1 + x)$.
c. $\ln 1{,}1$. La calculadora da $\ln 1{,}1 \approx 0{,}0953$, efectivamente menor.