Soluciones del examen - Aplicaciones de las derivadas

Curso: 2 Bachillerato Ciencias · Duración: 60 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (4 puntos)

a. $f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x-2)(x+2)$. Signo: negativo en $(-\infty, -2)$, positivo en $(-2, 0)$, negativo en $(0, 2)$ y positivo en $(2, +\infty)$. Decrece en $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$ y crece en $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$. Los ceros de f' son -2, 0 y 2; el signo se estudia en los cuatro intervalos con valores de prueba, por ejemplo $f'(1) = 4 - 16 = -12 < 0$. (2 puntos)

b. Mínimos relativos en $(-2, -13)$ y $(2, -13)$; máximo relativo en $(0, 3)$. Valores: $f(\pm 2) = 16 - 32 + 3 = -13$ y $f(0) = 3$. La función es par, por eso los dos mínimos tienen la misma altura. (1 punto)

c. En $[-1, 3]$: $f(-1) = 1 - 8 + 3 = -4$, $f(0) = 3$, $f(2) = -13$, $f(3) = 81 - 72 + 3 = 12$. Máximo absoluto 12 en $x = 3$ y mínimo absoluto -13 en $x = 2$. (1 punto)

Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

a. $f''(x) = 6x - 6$: cóncava en $(-\infty, 1)$ y convexa en $(1, +\infty)$. Inflexión en $(1, 0)$. La segunda derivada es negativa a la izquierda de 1 y positiva a la derecha, y $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$. (2 puntos)

b. $f'(1) = 3 - 6 = -3$: $y = -3(x-1)$, es decir, $y = -3x + 3$. La pendiente se calcula con $f'(x) = 3x^2 - 6x$. La tangente en un punto de inflexión atraviesa la curva.

c. $g'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ y $g''(x) = \dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$: convexa en $(-1, 1)$ y cóncava fuera. Inflexión en $(\pm 1, \ln 2)$. Para derivar el cociente: $\frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$. El signo depende de $1 - x^2$, positivo solo en $(-1, 1)$, y $g(\pm 1) = \ln 2 \approx 0{,}69$. Como g es par, las dos inflexiones son simétricas. (1 punto)

Solución del ejercicio 3 (4 puntos)

a. $f(0) = c = 1$; $f'(1) = 3 + 2a + b = 0$; $f''(2) = 12 + 2a = 0$. Pasar por $(0, 1)$ da $f(0) = 1$. El extremo en $x = 1$ exige $f'(1) = 0$, con $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$. La inflexión en $x = 2$ exige $f''(2) = 0$, con $f''(x) = 6x + 2a$. (1,5 puntos)

b. $a = -6$, $b = -3 - 2a = 9$, $c = 1$: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$. De la tercera ecuación, $2a = -12$; al sustituir en la segunda, $3 - 12 + b = 0$. Comprobación: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$ se anula en 1, y $f''(2) = 12 - 12 = 0$. (1,5 puntos)

c. $f''(1) = 6 - 12 = -6 < 0$: máximo relativo, en $(1, 5)$. Aquí $f''(x) = 6x - 12$. El valor del máximo es $f(1) = 1 - 6 + 9 + 1 = 5$. El otro punto crítico, $x = 3$, es un mínimo: $f(3) = 27 - 54 + 27 + 1 = 1$.

Resultado: $a = -6$, $b = 9$, $c = 1$.

Interpretación: la curva sube hasta $(1, 5)$, baja hasta $(3, 1)$ y cambia de curvatura en $(2, 3)$, punto medio de ambos extremos.

Solución del ejercicio 4 (4 puntos)

a. Hay tres lados de longitud x y dos de longitud y: $3x + 2y = 240$, $y = \dfrac{240 - 3x}{2}$. $A(x) = x \cdot \dfrac{240 - 3x}{2} = 120x - \frac{3}{2}x^2$. La valla interior es paralela a los lados x: hay tres tramos de longitud x (dos lados y la división) y dos de longitud y. El dominio es $0 < x < 80$ para que y sea positivo. (1,5 puntos)

b. $A'(x) = 120 - 3x = 0$, $x = 40$ m; $A'' = -3 < 0$: máximo. $y = \dfrac{240 - 120}{2} = 60$ m. Se deriva el área y se iguala a cero. Como la segunda derivada es negativa, el punto crítico es un máximo; además, en los extremos del dominio el área vale 0.

c. $A = 40 \cdot 60 = 2\,400$ m². Comprobación de la valla: $3 \cdot 40 + 2 \cdot 60 = 240$ m. El corral queda dividido en dos parcelas de 40×30 m, de 1 200 m² cada una. (0,5 puntos)

Respuesta: el corral óptimo mide 40 m por 60 m.

Solución del ejercicio 5 (4 puntos)

a. Dominio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Vertical $x = 1$ ($\lim_{x \to 1^-} = -\infty$, $\lim_{x \to 1^+} = +\infty$). Oblicua: $\dfrac{x^2 + 3}{x - 1} = x + 1 + \dfrac{4}{x - 1}$, luego $y = x + 1$. (1,5 puntos)

b. $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} = \dfrac{(x - 3)(x + 1)}{(x - 1)^2}$. Crece en $(-\infty, -1)$ y $(3, +\infty)$; decrece en $(-1, 1)$ y $(1, 3)$. Máximo $(-1, -2)$ y mínimo $(3, 6)$. (1,5 puntos)

c. Rama izquierda: sube pegada a $y = x + 1$ por debajo, llega al máximo $(-1, -2)$ y baja hacia $-\infty$ junto a $x = 1$. Rama derecha: baja desde $+\infty$ hasta el mínimo $(3, 6)$ y sube por encima de $y = x + 1$. (1 punto)