Apuntes - Aplicaciones de las derivadas

Curso: 2 Bachillerato Ciencias

Actividad de introducción: la lata perfecta

Las empresas de bebidas fabrican cada año miles de millones de latas. Si cada una lleva un poco menos de aluminio, el ahorro de dinero y de energía es enorme. Pero una lata de 330 mililitros puede ser alta y estrecha o baja y ancha: ¿cuál gasta menos material? Prueba con la calculadora: con un radio de 2 cm hace falta una altura de unos 26 cm, y la lata parece un tubo; con un radio de 8 cm la altura es de solo 1,6 cm, y parece una lata de atún. Entre esos dos extremos hay una forma que gasta lo mínimo, y la herramienta para encontrarla es la derivada. En este tema aprenderás a usar las derivadas para saber dónde crece y decrece una función, dónde tiene máximos y mínimos, cómo se curva su gráfica y cómo resolver problemas de optimización, que son de los más frecuentes en la PAU: vallas, cajas, carteles, cables, beneficios y costes.

Monotonía y extremos relativos

Definición: monotonía y extremos relativos

Una función es **creciente** en un intervalo si $f' \geq 0$ y **decreciente** si $f' \leq 0$. Un punto a es un **máximo relativo** si $f(a) \geq f(x)$ cerca de a y un **mínimo relativo** si $f(a) \leq f(x)$ cerca de a. Si f es derivable y tiene un extremo en a, entonces $f'(a) = 0$ (punto crítico). La condición recíproca es falsa: $f(x) = x^3$ tiene $f'(0) = 0$ y no tiene extremo.

Teorema: criterios de extremos

- Primera derivada: si f' pasa de $+$ a $-$ en a, máximo; de $-$ a $+$, mínimo; si no cambia de signo, no hay extremo.
- Segunda derivada: si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$, mínimo; si $f''(a)$, máximo; si $f''(a) = 0$, no se puede decidir.

Curvatura y puntos de inflexión

Definición: curvatura y puntos de inflexión

Una función es **convexa** ($\cup$, cóncava hacia arriba) donde $f'' > 0$ y **cóncava** ($\cap$) donde f''. Un **punto de inflexión** es donde cambia la curvatura: $f''(a) = 0$ y f'' cambia de signo en a (o $f'''(a) \neq 0$).

Ejemplo 1

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$. Signo de f': $+$ en $(-\infty, -1)$, $-$ en $(-1, 3)$, $+$ en $(3, \infty)$. Máximo en $x = -1$ con $f(-1) = 10$; mínimo en $x = 3$ con $f(3) = -22$. $f''(x) = 6x - 6$: inflexión en $x = 1$, $f(1) = -6$; convexa para $x > 1$.

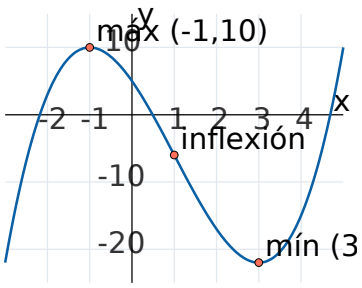


Figura: gráfica de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ con sus extremos y su punto de inflexión.

Extremos absolutos en un intervalo cerrado

Definición: extremos absolutos en un intervalo cerrado

Si f es continua en $[a, b]$ (Weierstrass), los extremos absolutos están entre los valores de f en los puntos críticos del intervalo y en los extremos a y b. Se calculan todos y se comparan.

Ejemplo 2

$f(x) = x^3 - 12x$ en $[-3, 5]$: $f' = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$. $f(-3) = 9$, $f(-2) = 16$, $f(2) = -16$, $f(5) = 65$. Máximo absoluto 65 en $x = 5$; mínimo absoluto -16 en $x = 2$.

Problemas de optimización

Método: optimizar

1. Dibuja la situación y asigna una variable a cada magnitud.
2. Escribe la función a maximizar o minimizar.
3. Elimina variables con la condición del enunciado y fija el dominio.
4. Deriva, resuelve $f' = 0$ y confirma con f'' o con los extremos del dominio.
5. Responde con unidades y comprueba que el resultado tiene sentido.

Ejemplo 3

De todos los rectángulos de perímetro 40, ¿cuál tiene área máxima? Lados x y $20 - x$: $A(x) = x(20 - x)$, $A' = 20 - 2x = 0 \Rightarrow x = 10$, $A'' = -2$: máximo. Es el cuadrado de lado 10 y área 100.

Representación de funciones

Definición: representación de funciones

Para dibujar $y = f(x)$: (1) dominio; (2) simetrías (par: $f(-x) = f(x)$; impar: $f(-x) = -f(x)$) y periodicidad; (3) cortes con los ejes; (4) asíntotas; (5) monotonía y extremos; (6) curvatura e inflexiones; (7) tabla de valores y trazado.

Ejemplo 4

$f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$. Dominio $x \neq 1$. Corta en $(0,0)$. Asíntota vertical $x = 1$; oblicua $y = x + 1$ (porque $\frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$). $f' = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$: se anula en 0 y 2; máximo relativo en $x = 0$ ($f = 0$), mínimo relativo en $x = 2$ ($f = 4$). Crece en $(-\infty, 0)$ y $(2, \infty)$, decrece en $(0,1)$ y $(1,2)$.

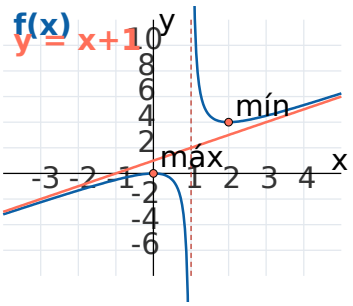


Figura: $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, con asíntota vertical $x = 1$ y oblicua $y = x + 1$.

Errores frecuentes

¡Atención!

- Creer que $f'(a) = 0$ siempre significa extremo (contraejemplo x^3).
- Olvidar comparar con los extremos del intervalo en el cálculo de extremos absolutos.
- En optimización, no comprobar que el punto crítico es máximo o mínimo.
- Dar la solución sin las unidades o fuera del dominio del problema.

Cómo se plantean estos problemas en la PAU

Observación

La prueba suele pedir (a) el estudio de monotonía y extremos de una función dada, a menudo con parámetros que se determinan imponiendo un extremo o una inflexión en un punto; (b) un problema de optimización con contexto geométrico o económico;

(c) en ocasiones, la representación aproximada de la gráfica con asíntotas. Practica la redacción: «La función es continua y derivable en su dominio. $f'(x) = 0 \iff x = \ldots$. Estudiamos el signo de f'...». Escribir cada paso con claridad es parte de la nota. En los problemas con parámetros, plantea un sistema con las condiciones: $f'(a) = 0$, $f(a) =$ valor, $f''(b) = 0$...

Ejemplo 5

Halla a, b para que $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ tenga un mínimo en $x = 2$ con valor -4. Condiciones: $f'(2) = 12 + 4a + b = 0$ y $f(2) = 8 + 4a + 2b = -4$. De la primera, $b = -12 - 4a$; en la segunda: $8 + 4a - 24 - 8a = -4 \Rightarrow a = -3$, $b = 0$. Comprobación: $f''(2) = 12 - 6 = 6 > 0$, es un mínimo.

Método: problema de optimización

1. Define la variable y escribe la función a optimizar.
2. Usa la restricción para dejarla en una sola variable.
3. Resuelve $f'(x) = 0$ y comprueba el signo de f'' o los extremos.
4. Interpreta y responde con unidades.

Estrategia para los problemas de optimización

Método: los cinco pasos de un problema de optimización

1. Lee el enunciado, haz un dibujo y nombra las variables con sus unidades.
2. Escribe la función que hay que optimizar (área, coste, beneficio, distancia) y la condición que relaciona las variables.
3. Usa la condición para dejar la función con una sola variable y escribe su dominio.
4. Deriva, iguala a cero y comprueba con la segunda derivada o con el signo de la primera que es un máximo o un mínimo; si el dominio es cerrado, compara también con los extremos.
5. Responde a la pregunta con todas las magnitudes que se piden y comprueba que el resultado es razonable.

Ejemplo 6

Un huerto rectangular junto a un muro se valla por tres lados con 60 m de valla. ¿Qué dimensiones dan el área máxima?

Si los lados perpendiculares al muro miden x, el paralelo mide $60 - 2x$, y el área es $x(60 - 2x)$. Su derivada, $60 - 4x$, se anula en $x = 15$, y la segunda derivada es negativa. El huerto óptimo mide 15 m por 30 m, con 450 m². Observa que no es un cuadrado: como el muro ahorra valla en un lado, conviene que ese lado sea el más largo.

Ejemplo 7

Un cable va de una central a un pueblo situado al otro lado de un río de 3 km, 8 km río abajo. Bajo el agua cuesta 50 000 € por km y por tierra 30 000 €. ¿Dónde debe salir del agua?

Si sale del agua a x km río abajo, el coste en miles de euros es $50\sqrt{9+x^2}+30(8-x)$. Al derivar e igualar a cero queda $5x=3\sqrt{9+x^2}$, cuya solución positiva es $x=2{,}25$ km. El coste mínimo es de 360 000 €, frente a 390 000 € si cruza en perpendicular. Este tipo de razonamiento es el mismo que explica por qué la luz se refracta al pasar del aire al agua.

¡Atención!

Que la derivada se anule en un punto no garantiza que haya un extremo: la función x^3 tiene derivada nula en el origen y allí no tiene ni máximo ni mínimo, sino un punto de inflexión. Siempre hay que comprobar el cambio de signo de la derivada o el signo de la segunda derivada. Además, en un intervalo cerrado el máximo o el mínimo absoluto puede estar en un extremo del intervalo, donde la derivada no tiene por qué ser cero. En los problemas, no olvides el dominio: una longitud no puede ser negativa ni mayor que el material disponible.

Leer la gráfica a partir de las derivadas

Propiedad: qué dice cada derivada

La primera derivada informa de la pendiente: si es positiva la función sube, si es negativa baja y donde cambia de signo hay un extremo relativo. La segunda derivada informa de cómo cambia la pendiente: si es positiva, la pendiente aumenta y la gráfica se curva hacia arriba (convexa); si es negativa, se curva hacia abajo (cóncava). En un punto de inflexión la pendiente alcanza un valor máximo o mínimo, por eso en las epidemias o en las ventas de un producto el punto de inflexión marca el momento de crecimiento más rápido, a partir del cual se dice que el fenómeno empieza a frenar aunque siga creciendo.

Ejemplo 8

Los casos acumulados de una epidemia son $C(t)=-t^3+12t^2$ (cientos, t en semanas). ¿Cuándo se propaga más deprisa?

La velocidad de propagación es $C'(t)=-3t^2+24t$, una parábola hacia abajo con el vértice en $t=4$. En ese momento $C''(4)=0$ y la gráfica de C pasa de convexa a cóncava. A partir de la cuarta semana siguen apareciendo casos, pero cada semana menos que la anterior.

Observación: la naturaleza también optimiza

Muchos fenómenos naturales siguen un principio de optimización. Las abejas construyen celdas hexagonales porque el hexágono encierra la mayor área con la menor cantidad de cera entre las figuras que cubren el plano. Las pompas de jabón son esféricas porque la esfera encierra un volumen dado con la menor superficie. Y la luz, según el principio de Fermat, sigue siempre el camino que tarda menos tiempo. El cálculo de máximos y mínimos con derivadas se desarrolló en el siglo XVII precisamente para resolver problemas como estos.

El consejo de Otto

Haz siempre una tabla de signos de f' con los puntos críticos y las discontinuidades. Es más seguro que la segunda derivada y te sirve también para dibujar la gráfica.