Ejercicios - Aplicaciones de las derivadas

Curso: 2 Bachillerato Ciencias · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Monotonía y extremos relativos

Para estudiar la monotonía se busca dónde $f'(x) > 0$ (crece) y dónde $f'(x)$ (decrece). Se considera $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

a. Calcula $f'(x)$ y sus raíces.
b. Estudia el signo de f' y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c. Halla los máximos y mínimos relativos.
d. Comprueba la naturaleza de los extremos con la segunda derivada.

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Curvatura y punto de inflexión

Una función es convexa (forma ∪) donde $f'' > 0$ y cóncava (forma ∩) donde f''. Los puntos donde cambia la curvatura son puntos de inflexión. Sigue con $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

a. Calcula $f''(x)$ y estudia su signo.
b. Halla el punto de inflexión.
c. Halla la recta tangente en el punto de inflexión.
d. ¿Qué tiene de especial la pendiente en ese punto?

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Extremos de una función exponencial

Se considera $f(x) = xe^{-x}$.

a. Calcula $f'(x)$ y estudia la monotonía.
b. Halla el extremo relativo.
c. Calcula $f''(x)$ y halla el punto de inflexión.
d. Calcula $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Extremos absolutos en un intervalo cerrado

Por el teorema de Weierstrass, una función continua en $[a, b]$ alcanza un máximo y un mínimo absolutos, que están en los extremos del intervalo o en los puntos críticos

interiores. Se considera $f(x) = x^3 - 3x$ en $[-2, 3]$.

a. Halla los puntos críticos de f en el intervalo.
b. Calcula el valor de f en los puntos críticos y en los extremos.
c. Indica el máximo y el mínimo absolutos.

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Hallar parámetros a partir de un extremo

Se busca $f(x) = ax^3 + bx^2$ cuya gráfica tenga un extremo relativo en el punto $(1, 2)$.

a. Escribe las dos condiciones que deben cumplir a y b.
b. Halla a y b.
c. ¿Es un máximo o un mínimo?
d. Halla el otro extremo relativo.

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Extremos de una función racional

Se considera $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$.

a. Halla el dominio y estudia la simetría.
b. Calcula $f'(x)$ y halla los extremos relativos.
c. Halla las asíntotas.
d. Deduce el máximo y el mínimo absolutos de f en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – Representación de una función

Se quiere representar $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$ siguiendo los pasos habituales.

a. Halla el dominio, los cortes con los ejes y las asíntotas.
b. Estudia la monotonía y los extremos.
c. Estudia la curvatura sabiendo que $f''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3}$.
d. Describe la forma de la gráfica.

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – El precio del café con leche

Una cafetería universitaria de Oviedo calcula que, si vende el café con leche a p euros, vende $200 - 50p$ cafés al día. Cada café le cuesta 1 € de ingredientes.

a. Escribe el beneficio diario $B(p)$.
b. ¿A qué precio el beneficio es máximo? ¿Cuánto gana?
c. ¿Cuántos cafés vende a ese precio?
d. ¿Entre qué precios tiene beneficios positivos?

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – El huerto junto al muro

Una familia de un pueblo de Teruel quiere vallar un huerto rectangular aprovechando un muro de piedra como uno de los lados. Tiene 60 m de valla para los otros tres lados.

a. Si los lados perpendiculares al muro miden x m, expresa el área en función de x.
b. ¿Qué valores puede tomar x?
c. Halla las dimensiones del huerto de área máxima.
d. Calcula el área máxima.

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – La lata de refresco

Una empresa de bebidas de Sevilla quiere fabricar latas cilíndricas de 330 cm³ con la menor cantidad de aluminio posible, es decir, con superficie total mínima.

a. Expresa la altura h en función del radio r.
b. Escribe la superficie total $S(r)$.
c. Halla el radio y la altura que minimizan la superficie.
d. Comprueba que $h = 2r$. ¿Por qué crees que las latas reales son más altas?

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – La caja de regalo

En una tienda de regalos se fabrican cajas sin tapa a partir de láminas cuadradas de cartón de 12 dm de lado, recortando un cuadrado de lado x en cada esquina y doblando.

a. Escribe el volumen $V(x)$ y su dominio.
b. Halla el valor de x que hace máximo el volumen.
c. Calcula el volumen máximo.
d. ¿Cuánto cartón se desperdicia?

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – Los seguidores de una cuenta

Una cuenta de divulgación científica de una red social gana nuevos seguidores tras

publicar un vídeo viral. El número de nuevos seguidores el día t (en cientos) es $S(t) = 60te^{-0,2t}$.

a. Calcula $S'(t)$ y halla el día con más nuevos seguidores.
b. ¿Cuántos nuevos seguidores consigue ese día?
c. Calcula $\lim_{t\to+\infty} S(t)$ e interprétalo.
d. ¿Cuándo crece más deprisa el número de nuevos seguidores diarios? (Usa S''.)

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – La ventana normanda

Una casa rural de Navarra tiene una ventana formada por un rectángulo coronado por un semicírculo. El marco (todo el contorno) mide 6 m. Se quiere que entre la mayor cantidad de luz posible, es decir, que el área sea máxima.

a. Llama r al radio del semicírculo (la base mide $2r$) y y a la altura del rectángulo. Escribe el perímetro y despeja y.
b. Escribe el área en función de r.
c. Halla r y y que hacen máxima el área.
d. Comprueba que la altura del rectángulo es igual al radio.

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – El camino más corto al sendero

Un sendero de un parque natural sigue la curva $y = x^2$ (hectómetros) y un refugio está en $R(3, 0)$. Se busca el punto del sendero más cercano al refugio para construir un acceso recto.

a. Escribe la distancia al cuadrado $d^2(x)$ desde un punto (x, x^2) del sendero hasta R.
b. Explica por qué basta minimizar d^2 en lugar de d.
c. Halla el punto más cercano.
d. Calcula la longitud del acceso y comprueba que es perpendicular a la tangente del sendero.

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – Problema: el cartel del cine

Un cine de verano de Málaga encarga carteles rectangulares. La zona impresa debe tener 50 dm². Por diseño, se dejan márgenes en blanco de 2 dm arriba y abajo y de 1 dm a cada lado. Se quiere gastar el menor papel posible.

Margen	Medida
Superior	2 dm
Inferior	2 dm

Margen	Medida
Izquierdo	1 dm
Derecho	1 dm

a. Si la zona impresa mide x dm de ancho, expresa su alto.
b. Escribe el área total del cartel $A(x)$.
c. Halla las dimensiones de la zona impresa que minimizan el área total.
d. Calcula las dimensiones y el área del cartel.
e. Compara con un cartel de zona impresa cuadrada.
f. ¿Qué proporción tiene el cartel óptimo? Explica por qué no es cuadrado.

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – Problema: el cable bajo el río

Una central eléctrica está en la orilla de un río de 3 km de ancho. Hay que llevar un cable hasta un pueblo situado en la otra orilla, 8 km río abajo. El cable bajo el agua cuesta 50 000 € por km y por tierra, a lo largo de la orilla, 30 000 € por km. El cable cruza el río en diagonal hasta un punto P de la otra orilla y sigue por tierra hasta el pueblo.

a. Llama x a la distancia río abajo desde el punto de enfrente de la central hasta P. Escribe el coste $C(x)$ en miles de euros.
b. Halla el valor de x que minimiza el coste.
c. Calcula el coste mínimo.
d. Compara con cruzar en perpendicular y seguir por tierra, y con ir todo bajo el agua.
e. ¿Qué pasaría si el cable bajo el agua costara lo mismo que por tierra?

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – Problema: estudio completo de una función

Se pide el estudio completo y la gráfica de $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$, como en un ejercicio de la PAU.

Completa la tabla de valores para ayudarte a dibujarla.

x	−2	−1	0,5	1	2
f(x)					

a. Dominio, cortes con los ejes y signo.
b. Asíntotas.
c. Monotonía y extremos.
d. Curvatura sabiendo que $f''(x) = \dfrac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}$.
e. Completa la tabla y esboza la gráfica.

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Problema: la producción óptima de cremas

Una empresa de cosmética de Barcelona puede fabricar entre 0 y 10 miles de envases al mes de una crema solar. Su beneficio mensual, en miles de euros, es $B(x) = -2x^3 + 21x^2 - 36x - 10$, donde x son los miles de envases.

a. Calcula $B'(x)$ y sus raíces.
b. Estudia la monotonía de B en $[0, 10]$.
c. Calcula el beneficio en los puntos críticos y en los extremos del intervalo.
d. ¿Cuántos envases debe fabricar para obtener el beneficio máximo? ¿Cuánto gana?
e. ¿Qué ocurre si fabrica al máximo de su capacidad? Explícalo.

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Problema: el ritmo de una epidemia de gripe

Durante una epidemia de gripe en una ciudad, los servicios de salud estiman el número acumulado de casos (en cientos) a las t semanas: $C(t) = -t^3 + 12t^2$, para $0 \le t \le 8$. La velocidad de propagación es $C'(t)$.

a. Calcula los casos acumulados a las 2, 4 y 8 semanas.
b. Calcula la velocidad de propagación $C'(t)$.
c. ¿En qué semana se propaga más deprisa? (Busca el máximo de C'.)
d. ¿Qué es ese instante en la gráfica de C?
e. ¿A partir de cuándo se dice que la epidemia está «frenando»?

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: ¿qué es mayor, e elevado a pi o pi elevado a e?

Para ir más allá. Las derivadas permiten demostrar desigualdades estudiando una función auxiliar.

a. Demuestra que $e^x \ge 1 + x$ para todo x, estudiando el mínimo de $g(x) = e^x - 1 - x$.
b. Estudia la monotonía de $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ para $x > 0$ y halla su máximo.
c. Deduce cuál es mayor, e^π o π^e, sin calculadora.