Soluciones - Aplicaciones de las derivadas

Curso: 2 Bachillerato Ciencias

Solución del ejercicio 1

Se calcula la derivada, se factoriza y se buscan sus raíces. Esas raíces dividen la recta en intervalos donde la derivada tiene signo constante; donde el signo cambia de positivo a negativo hay un máximo y al revés un mínimo.

a. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$. Raíces $x = 1$ y $x = 3$.
b. $f' > 0$ en $(-\infty, 1)$ y $(3, +\infty)$: crece. f' en $(1, 3)$: decrece.
c. Máximo relativo en $(1, f(1)) = (1, 5)$ y mínimo relativo en $(3, f(3)) = (3, 1)$.
d. $f''(x) = 6x - 12$. $f''(1) = -6$: máximo. $f''(3) = 6 > 0$: mínimo.

Solución del ejercicio 2

La curvatura se estudia con el signo de la segunda derivada. El punto donde cambia de signo es un punto de inflexión, y la tangente en él se escribe con la derivada primera en ese punto.

a. $f''(x) = 6x - 12$: negativa si x (cóncava) y positiva si $x > 2$ (convexa).
b. Cambia en $x = 2$: punto de inflexión $(2, f(2)) = (2, 3)$.
c. $f'(2) = 12 - 24 + 9 = -3$. Tangente: $y - 3 = -3(x-2)$, es decir, $y = -3x + 9$.
d. Es la pendiente mínima de la función: f' es una parábola con vértice en $x = 2$, donde la función decrece más deprisa.

Solución del ejercicio 3

La derivada de un producto con exponencial se simplifica sacando factor común la exponencial, que siempre es positiva. Así el signo de la derivada depende solo del otro factor, y lo mismo ocurre con la segunda derivada.

a. $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$. Como $e^{-x} > 0$, crece si x y decrece si $x > 1$.
b. Máximo relativo en $\left(1, \frac{1}{e}\right) \approx (1;\, 0{,}37)$.
c. $f''(x) = -e^{-x}(1-x) - e^{-x} = e^{-x}(x-2)$: cóncava si x, convexa si $x > 2$. Inflexión en $\left(2, \frac{2}{e^2}\right) \approx (2;\, 0{,}27)$.
d. $\dfrac{x}{e^x}$ es $\frac{\infty}{\infty}$; por L'Hôpital, $\dfrac{1}{e^x} \to 0$. Asíntota $y = 0$.

Solución del ejercicio 4

En un intervalo cerrado los extremos absolutos se buscan entre los puntos críticos interiores y los extremos del intervalo. Se evalúa la función en todos ellos y se comparan los valores obtenidos.

a. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$ en $x = \pm 1$, los dos dentro de $[-2, 3]$.
b. $f(-2) = -8 + 6 = -2$, $f(-1) = -1 + 3 = 2$, $f(1) = 1 - 3 = -2$, $f(3) = 27 - 9 = 18$.
c. Máximo absoluto 18 en $x = 3$; mínimo absoluto -2, que se alcanza en $x = -2$ y en $x = 1$.

Solución del ejercicio 5

Cada dato del enunciado se traduce en una ecuación: pasar por un punto da una ecuación con la función y tener un extremo da otra con la derivada. Resolviendo el sistema se obtienen los parámetros, y después se comprueba la naturaleza del extremo.

a. Pasa por $(1, 2)$: $a + b = 2$. Extremo en $x = 1$: $f'(1) = 3a + 2b = 0$.
b. De la primera $b = 2 - a$; en la segunda $3a + 4 - 2a = 0$, $a = -4$, $b = 6$. $f(x) = -4x^3 + 6x^2$.
c. $f''(x) = -24x + 12$; $f''(1) = -12$: máximo.
d. $f'(x) = -12x^2 + 12x = -12x(x - 1)$: también se anula en $x = 0$, con $f''(0) = 12 > 0$: mínimo en $(0, 0)$.

Solución del ejercicio 6

a. El denominador no se anula: dominio $\mathbb{R}$. $f(-x) = -f(x)$: es impar (simétrica respecto del origen).
b. $f'(x) = \dfrac{(x^2 + 1) - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$. Se anula en $x = \pm 1$: mínimo en $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ y máximo en $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ (decrece, crece, decrece).
c. No hay verticales. $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$: asíntota horizontal $y = 0$.
d. Como tiende a 0 en el infinito, los extremos relativos son absolutos: máximo $\frac{1}{2}$ y mínimo $-\frac{1}{2}$.

Solución del ejercicio 7

a. Dominio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Corte $(0, 0)$. Asíntota vertical $x = 1$ ($\lim_{x \to 1^{\pm}} = \pm\infty$) y oblicua $y = x + 1$, porque $\dfrac{x^2}{x - 1} = x + 1 + \dfrac{1}{x - 1}$.
b. $f'(x) = \dfrac{2x(x - 1) - x^2}{(x - 1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$. Crece en $(-\infty, 0)$ y $(2, +\infty)$; decrece en $(0, 1)$ y $(1, 2)$. Máximo $(0, 0)$ y mínimo $(2, 4)$.
c. Cóncava si x y convexa si $x > 1$. No hay inflexión: $x = 1$ no está en el dominio.
d. Dos ramas: a la izquierda, con forma de $\cap$ y máximo en el origen; a la derecha, con forma de $\cup$ y mínimo en $(2, 4)$, las dos pegadas a las asíntotas.

Solución del ejercicio 8

Se escribe el beneficio como ingresos menos costes, en función del precio. El precio óptimo anula la derivada y la segunda derivada negativa confirma que es un máximo; los beneficios positivos se obtienen resolviendo una inecuación de segundo grado.

a. $B(p) = (p-1)(200-50p) = -50p^2 + 250p - 200$.
b. $B'(p) = -100p + 250 = 0$, $p = 2{,}50$ €. $B'' = -100$: máximo.
   $B(2{,}5) = 1{,}5 \cdot 75 = 112{,}50$ €.
c. $200 - 125 = 75$ cafés.
d. $B(p) > 0$ si 1 €.

Solución del ejercicio 9

Se nombra la variable, se usa la cantidad de valla para expresar el otro lado y se escribe el área con una sola variable. El máximo se encuentra donde la derivada vale cero, y se comprueba con la segunda derivada.

a. El lado paralelo al muro mide $60 - 2x$. $A(x) = x(60-2x) = 60x - 2x^2$.
b. 0.
c. $A'(x) = 60 - 4x = 0$, $x = 15$ m; $A'' = -4$: máximo. El otro lado mide $60 - 30 = 30$ m.
d. $A(15) = 15 \cdot 30 = 450$ m².

Solución del ejercicio 10

La condición del volumen permite despejar la altura en función del radio. Sustituyendo en la superficie queda una función de una variable, cuyo mínimo se obtiene igualando su derivada a cero.

a. $\pi r^2 h = 330$, $h = \dfrac{330}{\pi r^2}$.
b. $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \dfrac{660}{r}$.
c. $S'(r) = 4\pi r - \dfrac{660}{r^2} = 0$, $r^3 = \dfrac{165}{\pi}$, $r \approx 3{,}74$ cm. Entonces $h \approx 7{,}49$ cm. $S'' > 0$: mínimo.
d. $h = \dfrac{330}{\pi r^2} = \dfrac{2 \cdot 165}{\pi r^2} = \dfrac{2\pi r^3}{\pi r^2} = 2r$. Las latas reales son más estrechas porque se sujetan mejor con la mano y la tapa, más gruesa, es más cara.

Solución del ejercicio 11

El volumen de la caja es el área de la base por la altura. Se deriva, se descartan las soluciones fuera del dominio y se comprueba con el signo de la derivada que el valor encontrado es un máximo.

a. $V(x) = x(12-2x)^2$, con 0.
b. $V'(x) = (12-2x)^2 - 4x(12-2x) = (12-2x)(12-6x) = 0$: $x = 6$ (no vale) o $x = 2$. Antes de 2 crece y después decrece: máximo en $x = 2$ dm.
c. $V(2) = 2 \cdot 8^2 = 128$ dm³.
d. Cuatro cuadrados de 2×2: 16 dm² de los 144 dm².

Solución del ejercicio 12

a. $S'(t) = 60e^{-0{,}2t}(1-0{,}2t) = 0$ en $t = 5$: crece antes y decrece después. Máximo el día 5.
b. $S(5) = 300e^{-1} \approx 110{,}4$ cientos, unos 11 000 seguidores.
c. Tiende a 0 (la exponencial gana): el efecto del vídeo se agota.
d. $S''(t) = 60e^{-0{,}2t}(0{,}04t - 0{,}4)$, que cambia de signo en $t = 10$: es un punto de inflexión, donde los nuevos seguidores diarios bajan más deprisa. El crecimiento más rápido es al principio, en $t = 0$.

Solución del ejercicio 13

El perímetro de la ventana incluye la base, los dos lados verticales y la semicircunferencia. Con él se despeja la altura del rectángulo y se escribe el área con una sola variable para maximizarla.

a. $2r + 2y + \pi r = 6$, $y = \dfrac{6-(2+\pi)r}{2}$.
b. $A = 2ry + \frac{1}{2}\pi r^2 = r(6-(2+\pi)r) + \frac{\pi}{2}r^2 = 6r - \left(2+\frac{\pi}{2}\right)r^2$.
c. $A'(r) = 6-(4+\pi)r = 0$, $r = \dfrac{6}{4+\pi} \approx 0{,}840$ m. $y = \dfrac{6-(2+\pi)r}{2} \approx 0{,}840$ m. Área $\approx 2{,}520$ m².
d. $y = \dfrac{6(4+\pi) - 6(2+\pi)}{2(4+\pi)} = \dfrac{12}{2(4+\pi)} = \dfrac{6}{4+\pi} = r$.

Solución del ejercicio 14

Para minimizar una distancia se minimiza su cuadrado, que es más fácil de derivar y tiene el mínimo en el mismo punto. La ecuación que resulta se resuelve buscando una raíz entera y factorizando con Ruffini.

a. $d^2(x) = (x-3)^2 + x^4$.
b. La raíz cuadrada es creciente: d es mínima donde lo es d^2, y d^2 se deriva más fácilmente.
c. $(d^2)' = 2(x-3) + 4x^3 = 4x^3 + 2x - 6 = 2(x-1)(2x^2+2x+3)$. El segundo factor no tiene raíces reales: $x = 1$. Punto $(1, 1)$.
d. $d = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \approx 2{,}24$ hm. Acceso ; tangente en $(1, 1)$: vector

$(1, 2)$. Producto escalar $2 - 2 = 0$.

Solución del ejercicio 15

a. Alto $\dfrac{50}{x}$ dm.

b. $A(x) = (x + 2)\left(\dfrac{50}{x} + 4\right) = 58 + 4x + \dfrac{100}{x}$.

c. $A'(x) = 4 - \dfrac{100}{x^2} = 0$, $x = 5$; $A'' = \dfrac{200}{x^3} > 0$: mínimo. Zona impresa 5×10 dm.

d. Cartel 7×14 dm, de 98 dm².

e. Cuadrada: $x = \sqrt{50} \approx 7{,}07$, $A \approx 58 + 28{,}28 + 14{,}14 = 100{,}43$ dm², algo más.

f. El cartel es el doble de alto que de ancho, como la zona impresa: los márgenes verticales son el doble de los horizontales, así que conviene que la zona sea más estrecha.

Solución del ejercicio 16

a. $C(x) = 50\sqrt{9 + x^2} + 30(8 - x)$, con $0 \le x \le 8$.

b. $C'(x) = \dfrac{50x}{\sqrt{9 + x^2}} - 30 = 0$: $5x = 3\sqrt{9 + x^2}$, $25x^2 = 81 + 9x^2$, $x^2 = \frac{81}{16}$, $x = 2{,}25$ km.

c. $\sqrt{9 + 5{,}0625} = 3{,}75$. $C = 50 \cdot 3{,}75 + 30 \cdot 5{,}75 = 187{,}5 + 172{,}5 = 360$ mil euros.

d. Perpendicular: $C(0) = 150 + 240 = 390$ mil €. Todo bajo el agua: $C(8) = 50\sqrt{73} \approx 427{,}2$ mil €. La solución óptima ahorra al menos 30 000 €.

e. Si costara lo mismo, lo mejor sería la línea recta hasta el pueblo ($x = 8$), el camino más corto.

Solución del ejercicio 17

a. Dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. No corta los ejes. Negativa si x, positiva si $x > 0$.

b. Vertical $x = 0$ ($\lim_{x \to 0^-} = -\infty$, $\lim_{x \to 0^+} = +\infty$). Horizontal $y = 0$ cuando $x \to -\infty$. Cuando $x \to +\infty$ tiende a $+\infty$ y $\frac{f(x)}{x} \to +\infty$: rama parabólica, sin oblicua.

c. $f'(x) = \dfrac{e^x(x - 1)}{x^2}$: decrece en $(-\infty, 0)$ y $(0, 1)$, crece en $(1, +\infty)$. Mínimo relativo $(1, e)$.

d. $x^2 - 2x + 2 > 0$ siempre (discriminante negativo): el signo es el de x^3. Cóncava si x, convexa si $x > 0$. Sin inflexión.

e. $f(-2) \approx -0{,}07$, $f(-1) \approx -0{,}37$, $f(0{,}5) \approx 3{,}30$, $f(1) \approx 2{,}72$, $f(2) \approx 3{,}69$.

Solución del ejercicio 18

a. $B'(x) = -6x^2 + 42x - 36 = -6(x^2 - 7x + 6) = -6(x-1)(x-6)$. Raíces 1 y 6.
b. Decrece en $(0, 1)$, crece en $(1, 6)$ y decrece en $(6, 10)$.
c. $B(0) = -10$, $B(1) = -27$, $B(6) = -432 + 756 - 216 - 10 = 98$, $B(10) = -2\,000 + 2\,100 - 360 - 10 = -270$.
d. 6 000 envases, con 98 000 € de beneficio (máximo absoluto).
e. Perdería 270 000 €: con tanta producción los costes crecen más que los ingresos (saturación del mercado, horas extra, almacenes).

Solución del ejercicio 19

La velocidad de propagación es la derivada de los casos acumulados. Su máximo se encuentra donde se anula la segunda derivada, que corresponde al punto de inflexión de la curva de casos.

a. $C(2) = -8 + 48 = 40$, $C(4) = -64 + 192 = 128$ y $C(8) = -512 + 768 = 256$ cientos.
b. $C'(t) = -3t^2 + 24t$.
c. $C''(t) = -6t + 24 = 0$ en $t = 4$; $C''' = -6$: máximo. En la semana 4 se propaga a $C'(4) = 48$ cientos por semana.
d. Es el punto de inflexión de C: pasa de convexa a cóncava.
e. A partir de la semana 4: los casos siguen aumentando, pero cada vez más despacio (C' decrece).

Solución del ejercicio 20

Para demostrar una desigualdad se estudia una función auxiliar: si su mínimo absoluto es cero, la función nunca es negativa. En el segundo caso, la monotonía de una función bien elegida permite comparar dos números.

a. $g'(x) = e^x - 1$: negativa si x y positiva si $x > 0$. Mínimo absoluto en $x = 0$, $g(0) = 0$. Por tanto $g(x) \geq 0$, es decir, $e^x \geq 1 + x$.
b. $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$: crece en $(0, e)$ y decrece en $(e, +\infty)$. Máximo en $x = e$, $f(e) = \frac{1}{e}$.
c. Como $\pi > e$, $\dfrac{\ln \pi}{\pi}$. Multiplicando por $e\pi$: $e \ln \pi$, es decir, $\ln \pi^e$. Por tanto $e^\pi > \pi^e$ (de hecho, $23{,}14 > 22{,}46$).