Soluciones del examen - Sistemas de ecuaciones

Curso: 2 Bachillerato Ccss · Duración: 90 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (4 puntos)

a. Matriz ampliada . Con la primera fila como pivote: $F_2 - 2F_1$ da $(0\ -1\ -3\,|\,-2)$ y $F_3 - F_1$ da $(0\ -2\ 1\,|\,3)$. Por último, $F_3 - 2F_2$ da $(0\ 0\ 7\,|\,7)$. Se elige la primera fila como pivote porque su primer coeficiente es 1. (2 puntos)

b. De la última fila, $7z = 7$, $z = 1$. En la segunda: $-y - 3 = -2$, $y = -1$. En la primera: $x = 2 - y - z = 2 + 1 - 1 = 2$. La solución es única, $(2, -1, 1)$: sistema compatible determinado. Comprobación en la tercera ecuación: $2 + 1 + 2 = 5$ ✓. (2 puntos)

Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

a. La tercera ecuación es la suma de las dos primeras: $(x + 2y - z) + (2x + y + z) = 3x + 3y$ y $1 + 5 = 6$. Al escalonar aparece una fila $(0\ 0\ 0\,|\,0)$, así que quedan dos ecuaciones independientes para tres incógnitas: sistema compatible indeterminado (SCI), con infinitas soluciones. (2 puntos)

b. $F_2 - 2F_1$ da $-3y + 3z = 3$, es decir, $y = z - 1$. Tomamos $z = \lambda$ como parámetro: $y = \lambda - 1$ y, de la primera, $x = 1 - 2(\lambda - 1) + \lambda = 3 - \lambda$. La solución general es $(3 - \lambda,\ \lambda - 1,\ \lambda)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. (2 puntos)

Solución del ejercicio 3 (4 puntos)

a. $F_2 - F_1$ da $y + z = 2$. $F_3 - F_2$ da $(k - 2)z = k - 3$. Si $k \neq 2$, se puede despejar $z = \dfrac{k-3}{k-2}$ y la solución es única: sistema compatible determinado. Si $k = 2$, la ecuación queda $0 = -1$, imposible: sistema incompatible. Con $k = 2$ el sistema escalonado tiene una fila $(0\ 0\ 0\,|\,-1)$: el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el de la ampliada, 3. (2,5 puntos)

b. Con $k = 3$: $(3 - 2)z = 0$, luego $z = 0$. De $y + z = 2$, $y = 2$. De la primera, $x = 3 - 2 - 0 = 1$. Solución $(1, 2, 0)$. Comprobación en la tercera: $1 + 4 + 0 = 5 = k + 2$ ✓. Coincide con la fórmula general: $z = \frac{3-3}{3-2} = 0$. (1,5 puntos)

Solución del ejercicio 4 (3 puntos)

a. Sean a, n y j los adultos, niños y jubilados. Personas: $a + n + j = 15$. Dinero: $20a + 12n + 10j = 206$. Condición: $n = 2a$. Son tres ecuaciones para tres incógnitas: el número de personas, el importe pagado y la relación entre niños y adultos. (1 punto)

b. Sustituyendo $n = 2a$ en la primera: $j = 15 - 3a$. En la segunda: $20a + 24a + 10(15 - 3a) = 206$, es decir, $14a + 150 = 206$, luego $a = 4$. Entonces $n = 8$ y $j = 3$. Van 4 adultos, 8 niños y 3 jubilados. Comprobación: $80 + 96 + 30 = 206$ €. El número de jubilados, $15 - 3a$, debe ser un entero no negativo, lo que limita a a valores de 0 a 5. (2 puntos)

Solución del ejercicio 5 (5 puntos)

a.  (1 punto)

b. Con F_2 como primera fila: $F_1 - 2F_2$: $y = 8$; $F_3 - F_2$: $y + z = 13$, $z = 5$; $x = 28 - 8 - 10 = 10$. Se fabricaron 10 de paseo, 8 de montaña y 5 eléctricas. Restar dos veces la segunda ecuación a la primera elimina x y z a la vez: $2x + 3y + 4z - 2(x + y + 2z) = y$ y $64 - 56 = 8$. Comprobación: $20 + 24 + 20 = 64$ y $10 + 16 + 15 = 41$. (2 puntos)

c. $500 + 640 + 750 = 1\,890$ €. Se multiplica cada cantidad por su beneficio unitario: $10 \cdot 50 + 8 \cdot 80 + 5 \cdot 150$. (0,5 puntos)

d. Con 30 h de pintura: $F_1 - 2F_2$: $y = 64 - 60 = 4$; $F_3 - F_2$: $y + z = 11$, $z = 7$; $x = 30 - 4 - 14 = 12$. Producción: 12, 4 y 7. Beneficio: $600 + 320 + 1\,050 = 1\,970$ €. Al disponer de más pintura bajan las bicicletas de montaña y suben las eléctricas, que son las más rentables. (1,5 puntos)