Apuntes - Sistemas de ecuaciones

Curso: 2 Bachillerato Ccss

Los sistemas de ecuaciones lineales aparecen cuando hay que averiguar cuántas unidades de cada producto se fabrican, qué cantidad de cada ingrediente se mezcla o cuántas entradas de cada tipo se han vendido, a partir de datos globales. Aquí los resolverás con el método de Gauss y los discutirás con parámetros.

Actividad de introducción: el bocadillo, el refresco y el helado

Tres amigos van a la cafetería de la piscina municipal. Uno pide un bocadillo, un refresco y un helado y paga 7 €; otro pide dos bocadillos y un refresco y paga 9 €; el tercero pide un refresco y dos helados y paga 5 €. Nadie se acuerda de los precios, pero con esos tres datos se pueden recuperar. Cada ticket es una ecuación lineal y los tres juntos forman un sistema. Pero no siempre hay una única respuesta: si los tickets se repitieran o se contradijeran, habría infinitas soluciones o ninguna. En este tema aprenderás a resolver sistemas con el método de Gauss, a clasificarlos y a discutirlos cuando dependen de un parámetro, y a plantear problemas de economía, comercio y vida diaria como los que aparecen en la prueba de acceso.

Sistemas lineales y su clasificación

Definición: sistema de ecuaciones lineales

Un **sistema de ecuaciones lineales** es un conjunto de ecuaciones de primer grado con varias incógnitas. Resolverlo es hallar los valores de las incógnitas que cumplen todas las ecuaciones a la vez.

Definición: clasificación

Compatible determinado (SCD): una única solución. **Compatible indeterminado (SCI)**: infinitas soluciones, que dependen de uno o más parámetros. **Incompatible (SI)**: ninguna solución.

Observación

Con dos incógnitas cada ecuación es una recta: si se cortan en un punto el sistema es SCD, si coinciden es SCI y si son paralelas es SI.

Ejemplo 1

Un cine vende 120 entradas: las de adulto cuestan 8 € y las de menor 5 €. La recaudación es de 840 €. ¿Cuántas de cada tipo?

Sea x las de adulto e y las de menor: $x + y = 120$, $8x + 5y = 840$. Multiplicando la

primera por 5 y restando: $3x = 240$, luego $x = 80$ e $y = 40$. Comprobación: $640 + 200 = 840$.

Método de Gauss

Regla: operaciones permitidas

En la matriz ampliada $(A \mid B)$ se puede intercambiar dos filas, multiplicar una fila por un número distinto de cero y sumar a una fila un múltiplo de otra. Se obtiene un sistema **escalonado** equivalente que se resuelve de abajo arriba.

Propiedad: interpretación de la matriz escalonada

Si hay tantas filas útiles como incógnitas, el sistema es SCD. Si aparece una fila $(0\ 0\ 0 \mid 0)$ y quedan menos ecuaciones que incógnitas, es SCI. Si aparece $(0\ 0\ 0 \mid k)$ con $k \neq 0$, es SI.

Método: método de Gauss

1. Escribe la matriz ampliada.
2. Consigue ceros bajo el primer pivote con operaciones entre filas.
3. Repite con la segunda columna.
4. Interpreta la última fila: valor de una incógnita, fila de ceros o contradicción.
5. Resuelve de abajo arriba y comprueba en las ecuaciones originales.

Ejemplo 2

Resuelve $x + y + z = 6$, $2x - y + z = 3$, $x + 2y - z = 2$.

Con $F_2 \to F_2 - 2F_1$ y $F_3 \to F_3 - F_1$: $(0, -3, -1 \mid -9)$ y $(0, 1, -2 \mid -4)$. Con $F_3 \to 3F_3 + F_2$: $(0, 0, -7 \mid -21)$, luego $z = 3$. De la segunda, $-3y - 3 = -9 \Rightarrow y = 2$. De la primera, $x = 6 - 2 - 3 = 1$. Solución: $(1, 2, 3)$.

Ejemplo 3

Resuelve $x + y - z = 1$, $2x + y + z = 4$, $3x + 2y = 5$.

La tercera ecuación es la suma de las dos primeras: $F_3 \to F_3 - F_1 - F_2$ da una fila de ceros. Sistema compatible indeterminado. Con $z = \lambda$: $x + y = 1 + \lambda$ y $2x + y = 4 - \lambda$, así que $x = 3 - 2\lambda$, $y = 3\lambda - 2$. Soluciones: $(3 - 2\lambda,\ 3\lambda - 2,\ \lambda)$.

Ejemplo 4

Clasifica $x + y = 2$, $2x + 2y = 5$.

$F_2 \to F_2 - 2F_1$ da $0 = 1$: imposible. Sistema incompatible (rectas paralelas).

¡Atención!

Al hacer reducción hay que multiplicar *todos* los términos de la ecuación, incluido el segundo miembro. Y que salgan fracciones no significa que el sistema sea incompatible.

Discusión de un sistema con parámetro

Regla: discusión

Se calcula el determinante de la matriz de coeficientes. Para los valores del parámetro que no lo anulan, el sistema es SCD. Para los que lo anulan, se estudia cada caso con Gauss.

Ejemplo 5

Discute $x + y = 2$, $mx + 2y = 5$ según m.

El determinante es $2 - m$. Si $m \neq 2$: SCD, con $x = \dfrac{1}{m-2}$. Si $m = 2$: las ecuaciones son $x + y = 2$ y $2x + 2y = 5$, incompatibles (SI).

Plantear problemas

Método: resolver un problema con enunciado

1. Define las incógnitas e indica sus unidades.
2. Traduce cada frase del enunciado a una ecuación.
3. Resuelve el sistema (sustitución, reducción o Gauss).
4. Comprueba que la solución tiene sentido (por ejemplo, número entero y positivo).
5. Responde con una frase.

Ejemplo 6

Se mezclan dos cafés de 6 €/kg y 9 €/kg para obtener 30 kg a 7,50 €/kg. ¿Cuántos kilos de cada uno?

$x + y = 30$ y $6x + 9y = 225$. Con $x = 30 - y$: $180 + 3y = 225 \Rightarrow y = 15$, $x = 15$. Se necesitan 15 kg de cada tipo.

Ejemplo 7

Un teatro vende 200 entradas en tres zonas (10 €, 20 € y 30 €) y recauda 3500 €. Hay el doble de entradas de patio que de palco. ¿Cuántas de cada zona?

Con x, y, z = patio, palco y anfiteatro: $x + y + z = 200$, $10x + 20y + 30z = 3500$, $x = 2y$. Sustituyendo, $3y + z = 200$ y $40y + 30z = 3500$. De $z = 200 - 3y$: $40y + 6000 - 90y = 3500 \Rightarrow y = 50$. Entonces $x = 100$ y $z = 50$. Comprobación: $1000 + 1000 + 1500 = 3500$.

Observación

En la PAU de Ciencias Sociales este bloque aparece como un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, a veces con parámetro, o como un problema de enunciado. Se valora el planteamiento, el desarrollo ordenado del método de Gauss y la interpretación de la solución.

Sistemas y matrices: el teorema de Rouché-Frobenius

Definición: forma matricial y rango

Un sistema lineal se escribe como $AX = B$, donde A es la matriz de coeficientes, X la columna de incógnitas y B la columna de términos independientes; la matriz ampliada A^* se obtiene añadiendo B a la derecha de A. El rango de una matriz es el número de filas no nulas que quedan al escalonarla por Gauss, es decir, el número de ecuaciones realmente independientes.

Teorema: Rouché-Frobenius

Un sistema con n incógnitas es compatible si y solo si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*)$. En ese caso es determinado si el rango es igual a n e indeterminado si es menor que n, y el número de parámetros es $n - \text{rg}(A)$. Si $\text{rg}(A)$, el sistema es incompatible. Cuando A es cuadrada y $|A| \neq 0$, el rango es máximo y el sistema es compatible determinado, y se puede resolver como $X = A^{-1}B$.

Ejemplo 8

Resuelve la actividad de introducción con b, r y h los precios del bocadillo, el refresco y el helado.

El sistema es $b + r + h = 7$, $2b + r = 9$, $r + 2h = 5$. De la segunda, $r = 9 - 2b$; de la tercera, $h = \dfrac{5 - r}{2} = b - 2$. Sustituyendo en la primera: $b + 9 - 2b + b - 2 = 7$, es decir, $7 = 7$. ¡Se cumple siempre! El sistema es compatible indeterminado: los tickets no bastan. Con $b = \lambda$: $r = 9 - 2\lambda$ y $h = \lambda - 2$. Si además se sabe que el bocadillo cuesta 4 €, el refresco cuesta 1 € y el helado 2 €.

Método: discutir un sistema con parámetro

1. Calcula el determinante de la matriz de coeficientes (si es cuadrada) en función del parámetro.

2. Halla los valores que lo anulan.
3. Para los demás valores, el sistema es compatible determinado.
4. Para cada valor que anula el determinante, sustitúyelo y aplica Gauss: si aparece una fila $(0\ 0\ 0 \mid c)$ con $c \neq 0$, es incompatible; si solo aparecen filas de ceros, es indeterminado.
5. Resume la discusión en una lista clara de casos.

Ejemplo 9

Discute el sistema $x + y = 3$, $2x + my = 6$ según los valores de m.

El determinante es $m - 2$. Si $m \neq 2$, el sistema es compatible determinado y, restando, $(m-2)y = 0$, luego $y = 0$ y $x = 3$. Si $m = 2$, la segunda ecuación es el doble de la primera: compatible indeterminado, con soluciones $(3 - \lambda,\ \lambda)$.

Plantear bien un problema

Observación: de las palabras a las ecuaciones

La parte más difícil de un problema de sistemas no suele ser resolverlo, sino plantearlo. Algunas expresiones aparecen una y otra vez: «en total» se traduce por una suma igual al total; «el doble de» multiplica por 2; «tantos como» o «igual a la suma de» da una igualdad entre incógnitas; «gana el 4 %» multiplica la cantidad por $0{,}04$; y «sin ganar ni perder» iguala el coste de la mezcla con su precio de venta. Conviene escribir antes qué representa cada incógnita y en qué unidades se mide, y pasar después todas las incógnitas al primer miembro para que el sistema quede ordenado y listo para aplicar Gauss. Al terminar, la solución debe tener sentido: no puede haber 2,5 entradas ni un precio negativo.

¡Atención!

Errores frecuentes: operar con una fila y olvidar el término independiente; multiplicar una fila por cero (no está permitido); confundir una fila $(0\ 0\ 0 \mid 0)$, que indica indeterminación, con una fila $(0\ 0\ 0 \mid 5)$, que indica incompatibilidad; y dar en los problemas soluciones negativas o decimales cuando las incógnitas son personas, entradas o productos. Comprueba siempre la solución en todas las ecuaciones originales.

¿Sabías que?

Hace más de dos mil años, el libro chino «Los nueve capítulos sobre el arte matemático» ya resolvía sistemas de tres ecuaciones colocando los coeficientes en una tabla y haciendo ceros con varillas de cálculo, el mismo procedimiento que hoy llamamos método de Gauss. Carl Friedrich Gauss lo sistematizó a principios del siglo XIX para calcular la órbita del asteroide Palas. Hoy los ordenadores resuelven sistemas con millones de ecuaciones para predecir el tiempo, diseñar aviones o

calcular los precios de la electricidad.

El consejo de Otto

Sustituye siempre la solución en las ecuaciones originales: si alguna no se cumple, hay un error de cálculo. En los problemas, escribe primero qué significa cada letra.