Soluciones - Sistemas de ecuaciones

Curso: 2 Bachillerato Ccss

Solución del ejercicio 1

a. Sustituimos $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ en cada ecuación: $1 + 2 + 3 = 6$ ✓; $2 - 2 + 3 = 3$ ✓; $1 + 4 - 3 = 2$ ✓. Como cumple las tres, $(1, 2, 3)$ sí es solución.
b. Con $(2, 1, 3)$: la primera da $2 + 1 + 3 = 6$ ✓, pero la segunda da $4 - 1 + 3 = 6 \neq 3$. No es solución: para serlo tiene que cumplir todas las ecuaciones, y basta con que falle una.
c. La matriz de coeficientes recoge los coeficientes de las incógnitas, fila a fila:

. La ampliada añade la columna de términos independientes:

.

Solución del ejercicio 2

a. Escribimos coeficientes y términos independientes: [redacted] .
b. Usamos la primera fila como pivote: $F_2 - 2F_1$ y $F_3 - 3F_1$ dan [redacted]

.
c. Dividimos F_2 entre -3: $(0\ 1\ 1 \mid 5)$. Luego $F_3 + 5F_2$: $(0\ 0\ 4 \mid 12)$, así que $z = 3$. Sustituyendo hacia arriba: $y = 5 - 3 = 2$ y $x = 8 - 2 \cdot 2 - 3 = 1$. La solución es $(1, 2, 3)$.
d. Al escalonar quedan tres ecuaciones no nulas para tres incógnitas: el sistema es compatible determinado (SCD), con solución única.

Solución del ejercicio 3

a. $F_2 - 2F_1$: $(0\ -1\ 1 \mid 1)$; $F_3 - 3F_1$: $(0\ -1\ 1 \mid 1)$. Las dos filas son iguales y $F_3 - F_2$ da $(0\ 0\ 0 \mid 0)$.
b. Quedan dos ecuaciones útiles para tres incógnitas: SCI, infinitas soluciones.
c. Tomamos $z = \lambda$. De $-y + z = 1$: $y = \lambda - 1$. De la primera: $x = 3 - y - z = 3 - (\lambda - 1) - \lambda = 4 - 2\lambda$. Solución: $(4 - 2\lambda,\ \lambda - 1,\ \lambda)$.
d. $\lambda = 0$: $(4, -1, 0)$. $\lambda = 2$: $(0, 1, 2)$. Ambas cumplen las tres ecuaciones.

Solución del ejercicio 4

a. $F_2 - F_1$: $(0\ \ -2\ 1 \mid -1)$; $F_3 - 2F_1$: $(0\ \ -2\ 1 \mid 1)$. Después $F_3 - F_2$: $(0\ 0\ 0 \mid 2)$.
b. La última fila dice $0 = 2$, imposible: sistema incompatible (SI), sin solución.
c. Sumando las dos primeras ecuaciones se obtiene $2x + 3z = 3$, pero la tercera dice $2x + 3z = 5$: se contradicen.

Solución del ejercicio 5

a. La matriz de coeficientes multiplica al vector de incógnitas: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$.
b. $|A| = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 1 \neq 0$, así que A es invertible. Con la fórmula de orden 2 (intercambiar la diagonal principal y cambiar de signo la secundaria): $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.
c. Multiplicando por A^{-1} por la izquierda: $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 - 8 \\ -3 \cdot 5 + 2 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Es decir, $x = 2$ e $y = 1$.
d. Primera ecuación: $2 \cdot 2 + 1 = 5$ ✓. Segunda: $3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8$ ✓. La solución es correcta.

Solución del ejercicio 6

a. Restando la primera ecuación a la segunda, $F_2 - F_1$, desaparecen x y z: $y = 1$. Restándola a la tercera, $F_3 - F_1$: $(k-1)z = 2$.
b. Todo depende del coeficiente $k - 1$. Si $k \neq 1$, se puede despejar $z = \dfrac{2}{k-1}$ y la solución es única: sistema compatible determinado. Si $k = 1$, la ecuación queda $0 \cdot z = 2$, es decir, $0 = 2$, imposible: sistema incompatible.
c. Con $k = 3$: $z = \dfrac{2}{3-1} = 1$, $y = 1$ y, de la primera ecuación, $x = 1 - y - z = 1 - 1 - 1 = -1$. Solución $(-1, 1, 1)$. Comprobación en la tercera: $-1 + 1 + 3 = 3$ ✓.

Solución del ejercicio 7

a. x: camiseta, y: pantalón, z: zapatillas (en euros).
b. De la tercera, $z = 2x + 2y - 20$; sustituyendo en la primera, $3x + 3y = 120$, es decir, $x + y = 40$. Con $3x + 2y = 95$: restando $2(x + y) = 80$ queda $x = 15$; $y = 25$ y $z = 2 \cdot 40 - 20 = 60$.

c. $15 + 25 + 60 = 100$ ✓; $45 + 50 = 95$ ✓; $2 \cdot 40 - 20 = 60$ ✓. Camiseta 15 €, pantalón 25 € y zapatillas 60 €.

Solución del ejercicio 8

a. Las condiciones del enunciado dan tres ecuaciones. Kilos totales: $a + n + h = 10$. Coste igual a ingreso (sin ganar ni perder): $12a + 15n + 10h = 10 \cdot 11{,}8 = 118$. Proporción: $h = 2n$.
b. Sustituimos $h = 2n$ en la primera: $a = 10 - 3n$. En la segunda: $12(10 - 3n) + 15n + 20n = 118$, es decir, $120 - n = 118$, luego $n = 2$. Entonces $h = 4$ y $a = 4$: 4 kg de almendras, 2 de nueces y 4 de avellanas.
c. $12 \cdot 4 + 15 \cdot 2 + 10 \cdot 4 = 48 + 30 + 40 = 118$ €, que coincide con lo que se obtiene al venderla a 11,80 €/kg.

Solución del ejercicio 9

a. Llamamos a, i y j a las entradas de adulto, infantiles y de jubilado. Número de entradas: $a + i + j = 200$. Recaudación: $8a + 5i + 4j = 1\,240$. Condición: $a = i + j$.
b. Sustituyendo $i + j = a$ en la primera: $2a = 200$, luego $a = 100$ e $i + j = 100$. En la segunda: $800 + 5i + 4j = 1\,240$, es decir, $5i + 4j = 440$. Con $j = 100 - i$: $5i + 400 - 4i = 440$, así que $i = 40$ y $j = 60$. Se vendieron 100 entradas de adulto, 40 infantiles y 60 de jubilado.
c. Las de adulto recaudan $8 \cdot 100 = 800$ €, y $\dfrac{800}{1\,240} \approx 0{,}645$: el 64,5 % de la recaudación.

Solución del ejercicio 10

a. Sean p, m y h las edades del padre, la madre y la hija. Las tres condiciones son: $p + m + h = 90$, $p - m = 3$ y $p + m = 5h$.
b. Sustituimos $p + m = 5h$ en la primera: $5h + h = 90$, luego $h = 15$. Entonces $p + m = 75$ y $p - m = 3$; sumando, $2p = 78$, así que $p = 39$ y $m = 36$. Comprobación: $39 + 36 + 15 = 90$.
c. Dentro de t años, cada padre suma t años y la hija también: $75 + 2t = 3(15 + t)$. Desarrollando, $75 + 2t = 45 + 3t$, luego $t = 30$ años. Entonces los padres sumarán 135 y la hija tendrá 45.

Solución del ejercicio 11

a. $A + B + C = 20$, $0{,}03A + 0{,}04B + 0{,}05C = 0{,}84$ (es decir, $3A + 4B + 5C = 84$), $B = A + C$.

b. De $B = A + C$ y la primera: $2B = 20$, $B = 10$, $A + C = 10$. Entonces $3A + 40 + 5C = 84$, $3A + 5C = 44$; con $A = 10 - C$: $30 + 2C = 44$, $C = 7$ y $A = 3$. Al 3 %: 3 000 €; al 4 %: 10 000 €; al 5 %: 7 000 €.
c. $20\,000 \cdot 0{,}04 = 800$ €, 40 € menos.

Solución del ejercicio 12

a. Cada recurso da una ecuación (fila de la tabla por las cantidades):



b. Con la primera fila como pivote: $F_2 - 2F_1$ da $(0\ \ -1\ \ -5\,|\,-28)$ y $F_3 - 4F_1$ da $(0\ \ -5\ \ -10\,|\,-65)$. Después $F_3 - 5F_2$: $(0\ 0\ 15\,|\,75)$, luego $z = 5$. Sustituyendo: $-y - 25 = -28$, $y = 3$; y $x = 23 - 6 - 15 = 2$. Se prepararon 2 tartas de queso, 3 de chocolate y 5 de manzana.
c. En total son $2 + 3 + 5 = 10$ tartas, que a 20 € cada una dan $10 \cdot 20 = 200$ €.

Solución del ejercicio 13

a. $x + y + z = 10$, $x + 2y + 3z = 20$. Dos ecuaciones y tres incógnitas: SCI.
b. Restando: $y + 2z = 10$, $y = 10 - 2z$; y $x = 10 - y - z = z$. Con $z = \lambda$: $(\lambda,\ 10 - 2\lambda,\ \lambda)$.
c. Hace falta $\lambda \geq 0$ y $10 - 2\lambda \geq 0$: $\lambda = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Hay 6 ramos.
d. $\lambda \geq 3$ y $10 - 2\lambda \geq 2$, es decir, $\lambda \leq 4$: los ramos $(3, 4, 3)$ y $(4, 2, 4)$.

Solución del ejercicio 14

a. $x + y + z = 4$, $x + 2y + 3z = 9$, $2x + 3y + 4z = a$. En efecto, $(1, 1, 1) + (1, 2, 3) = (2, 3, 4)$.
b. $F_3 - F_1 - F_2$: $0 = a - 13$. Si $a = 13$, SCI; si $a \neq 13$, SI.
c. Con $a = 13$: $F_2 - F_1$ da $y + 2z = 5$. Con $z = \lambda$: $y = 5 - 2\lambda$ y $x = 4 - y - z = \lambda - 1$. Solución $(\lambda - 1,\ 5 - 2\lambda,\ \lambda)$.
d. La tercera ecuación no aporta información nueva: es combinación de las otras dos. Con los datos disponibles no se pueden determinar las ventas.

Solución del ejercicio 15

a. $x + y + z = 150$, $10x + 25y + 6z = 1\,780$, $z = 2y$.
b. Con $z = 2y$: $x = 150 - 3y$. Sustituyendo: $10(150 - 3y) + 25y + 12y = 1\,780$, $1\,500 + 7y = 1\,780$, $y = 40$. Entonces $z = 80$ y $x = 30$: 30 camisetas, 40 sudaderas y 80 tazas.
c. Camisetas $30 \cdot 4 = 120$ €; sudaderas $40 \cdot 10 = 400$ €; tazas $80 \cdot 3 = 240$ €. Total:

760 €.

d. Faltan $900 - 760 = 140$ €; cada sudadera deja 10 €, así que harían falta 14 sudaderas más.
e. La sudadera: deja 10 € por unidad, frente a 4 € la camiseta y 3 € la taza.

Solución del ejercicio 16

a. 

b. Dividiendo: $2x + 4y + z = 15$ y $3x + y + 2z = 14$; la segunda se queda igual.
c. De $2x + 4y + z = 15$: $z = 15 - 2x - 4y$. Sustituyendo en $3x + y + 2z = 14$: $3x + y + 30 - 4x - 8y = 14$, $x + 7y = 16$. En la de grasas: $5x + 2y + 150 - 20x - 40y = 44$, $15x + 38y = 106$. Con $x = 16 - 7y$: $240 - 105y + 38y = 106$, $y = 2$, $x = 2$, $z = 15 - 4 - 8 = 3$.
d. 200 g de A, 200 g de B y 300 g de C.
e. Sí: el determinante de la matriz de coeficientes es $3\,350 \neq 0$, así que el sistema es compatible determinado para cualquier valor de los términos independientes (otra cosa es que la solución tenga cantidades positivas).

Solución del ejercicio 17

a. A: $x + y = 400$. B: $x + 100 = 200 + z$, es decir, $x - z = 100$. C: $y + z = 300$.
b. La primera ecuación es la suma de las otras dos: $(x - z) + (y + z) = x + y = 400$. Hay dos ecuaciones independientes y tres incógnitas: SCI.
c. $z = \lambda$, $x = 100 + \lambda$, $y = 300 - \lambda$.
d. $\lambda \geq 0$ y $300 - \lambda \geq 0$: $0 \leq \lambda \leq 300$ coches por hora.
e. $\lambda = 0$: $x = 100$, $y = 300$. Por la calle de A a C pasarían 300 coches por hora; es posible si esa calle admite ese tráfico, y el ayuntamiento debe comprobarlo antes de las obras.

Solución del ejercicio 18

a. 

b. Ordenamos con F_2 arriba porque tiene z con coeficiente 1: de $2x + 3y + z = 38$, $z = 38 - 2x - 3y$. En F_1: $3x + 2y + 114 - 6x - 9y = 50$, $3x + 7y = 64$. En F_3: $4x + y + 76 - 4x - 6y = 56$, $-5y = -20$, $y = 4$. Entonces $x = 12$ y $z = 38 - 24 - 12 = 2$. Menú 12 €, postre 4 € y café 2 €.
c. Debería pagar $5 \cdot 12 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 76$ €: se le han cobrado 4 € de más.
d. $48 + 16 + 4 = 68$ €.

Solución del ejercicio 19

a. $|A| = 1 \cdot (2a - 9) - 1 \cdot (a - 6) + 1 \cdot (3 - 4) = a - 4$.
b. Si $a \neq 4$: SCD para cualquier b. Si $a = 4$: $F_3 - F_1 - F_2$ da $0 = b - 20$; con $b = 20$ es SCI y con $b \neq 20$ es SI.
c. $F_2 - F_1$: $y + 2z = 8$. $F_3 - 2F_1$: $y + 3z = 11$. Restando, $z = 3$, $y = 2$ y $x = 1$.
d. Con $z = \lambda$: $y = 8 - 2\lambda$, $x = 6 - y - z = \lambda - 2$. Para que todo sea positivo, 2; por ejemplo, $\lambda = 3$ da $(1, 2, 3)$.
e. Que la receta es imposible: con ese ingrediente no se puede conseguir esa cantidad de fibra cumpliendo las otras dos condiciones.

Solución del ejercicio 20

a. $V(-1) = a - b + c = 6$, $V(1) = a + b + c = 4$, $V(2) = 4a + 2b + c = 9$.
b. Restando las dos primeras: $2b = -2$, $b = -1$. Restando la segunda a la tercera: $3a + b = 5$, $a = 2$. Entonces $c = 4 - 2 + 1 = 3$: $V(t) = 2t^2 - t + 3$.
c. $V(3) = 18 - 3 + 3 = 18$ miles de visitas.
d. $V(4) = 32 - 4 + 3 = 31 \neq 30$. Con la cuarta ecuación $16a + 4b + c = 30$ el sistema tiene cuatro ecuaciones y tres incógnitas y es incompatible: ninguna parábola pasa exactamente por los cuatro puntos, aunque el modelo sigue siendo una buena aproximación.