Soluciones del examen - Representación de funciones

Curso: 2 Bachillerato Ccss · Duración: 90 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (4 puntos)

a. $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{1\}$. Cortes: $(0, -2)$ y $(-2, 0)$. Eje Y: $f(0) = \frac{2}{-1} = -2$. Eje X: el numerador se anula en $x = -2$. (1 punto)

b. Vertical $x = 1$ (el numerador vale 3); horizontal $y = 1$ (mismo grado, cociente de coeficientes 1). Límites laterales: $\lim_{x \to 1^-} f = -\infty$ y $\lim_{x \to 1^+} f = +\infty$, porque el numerador vale 3, positivo, cerca de 1. (1,5 puntos)

c. $f'(x) = \dfrac{(x-1) - (x+2)}{(x-1)^2} = \dfrac{-3}{(x-1)^2}$: decreciente en $(-\infty, 1)$ y en $(1, +\infty)$; no tiene extremos. El numerador de la derivada es constante y negativo y el denominador siempre positivo; no se dice «decreciente en todo el dominio», porque $f(0) = -2 < f(2) = 4$. (1,5 puntos)

Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

a. $x^2(x-3) = 0$: $(0, 0)$ y $(3, 0)$. Se saca factor común x^2: la raíz $x = 0$ es doble y la gráfica es tangente al eje X en el origen. (1 punto)

b. $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$. Crece en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, decrece en $(0, 2)$. Máximo $(0, 0)$ y mínimo $(2, -4)$. Signo de f': positivo fuera de $[0, 2]$ y negativo dentro. Valores: $f(0) = 0$ y $f(2) = 8 - 12 = -4$. (1,5 puntos)

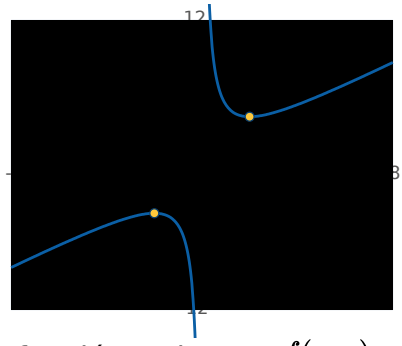
c. $f''(x) = 6x - 6$: cóncava ($\cap$) en $(-\infty, 1)$, convexa ($\cup$) en $(1, +\infty)$. Inflexión $(1, -2)$. La segunda derivada cambia de signo en $x = 1$ y $f(1) = 1 - 3 = -2$. El punto de inflexión es el punto medio de los dos extremos, como en toda cúbica.

Solución del ejercicio 3 (4 puntos)

a. Vertical $x = 0$. Oblicua: $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$, luego $y = x$. Los límites laterales en 0 son $-\infty$ por la izquierda y $+\infty$ por la derecha. No hay horizontal porque el grado del numerador supera en uno al del denominador. Como $f(x) - x = \frac{4}{x}$, la curva queda por encima de la oblicua para $x > 0$ y por debajo para $x < 0$. (1,5 puntos)

b. $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2} = 0$ en $x = \pm 2$. Máximo $(-2, -4)$ y mínimo $(2, 4)$. Signo de $f'(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2}$: positivo si $|x| > 2$ y negativo si $0 < |x| < 2$. Valores: $f(2) = \frac{8}{2} = 4$ y $f(-2) = -4$. El máximo relativo queda por debajo del mínimo relativo porque están en ramas distintas. (1,5 puntos)

c. Gráfica:



La función es impar, $f(-x) = -f(x)$: la gráfica es simétrica respecto del origen y no corta a los ejes. (1 punto)

Solución del ejercicio 4 (3 puntos)

a. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$: $y = 0$ por la derecha. Es una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$: la exponencial crece mucho más deprisa que x (por L'Hôpital, $\frac{1}{e^x} \to 0$). Por la izquierda, $xe^{-x} \to -\infty$ y no hay asíntota. (1 punto)

b. $f'(x) = e^{-x}(1 - x)$: crece en $(-\infty, 1)$ y decrece después; máximo $\left(1, \frac{1}{e}\right)$. Se deriva con la regla del producto: $e^{-x} - xe^{-x}$. Como $e^{-x} > 0$, el signo depende solo de $1 - x$. El valor máximo es $f(1) = e^{-1} \approx 0{,}368$. (1 punto)

c. $f''(x) = e^{-x}(x - 2)$: inflexión en $\left(2, \frac{2}{e^2}\right) \approx (2;\ 0{,}271)$. Al derivar f': $-e^{-x}(1 - x) - e^{-x} = e^{-x}(x - 2)$. Es cóncava en $(-\infty, 2)$ y convexa en $(2, +\infty)$. (1 punto)

Las tres conclusiones encajan: la curva sube hasta $x = 1$, baja después y se aplana hacia $y = 0$.

Solución del ejercicio 5 (5 puntos)

a. $M(x) = x + 16 + \frac{64}{x}$. Asíntota vertical $x = 0$ y oblicua $y = x + 16$. $M'(x) = 1 - \frac{64}{x^2} = 0$ en $x = 8$: mínimo $M(8) = 8 + 16 + 8 = 32$. Para la oblicua se observa que $M(x) - (x + 16) = \frac{64}{x} \to 0$. El mínimo se confirma porque M' pasa de negativa a positiva en $x = 8$. (2 puntos)

b. $B(x) = 40x - x^2 - 16x - 64 = -x^2 + 24x - 64$; $B'(x) = -2x + 24 = 0$ en $x = 12$, $B(12) = -144 + 288 - 64 = 80$ cientos de euros. La segunda derivada, $B''(x) = -2$, confirma que se trata de un máximo. (1,5 puntos)

c. $-x^2 + 24x - 64 = 0$ da $x = 12 \pm \sqrt{80}$: entre unos 306 y 2 094 ejemplares. (1 punto)

d. 1 200 ejemplares, que dan el beneficio máximo de 8 000 €, aunque el coste medio mínimo esté en 800. (0,5 puntos)