Apuntes - Representación de funciones

Curso: 2 Bachillerato Ccss

Representar una función es resumir en una gráfica todo lo que sabemos de ella: dónde existe, dónde corta a los ejes, hacia dónde se va, cuándo crece y cuándo decrece y cómo se curva. Seguirás un esquema fijo, como en la PAU de Ciencias Sociales.

Actividad de introducción: la gráfica que cuenta una historia

En un informe económico aparece la gráfica de los ingresos de una empresa durante un año. Sin ver la fórmula, cualquiera puede leer en ella cuándo crecieron las ventas, cuándo alcanzaron su máximo, cuándo empezaron a frenarse y hacia qué valor tienden. Representar una función es hacer el camino contrario: a partir de la fórmula, deducir con cálculos todas esas características y dibujar una gráfica fiel. En la prueba de acceso a la universidad de Ciencias Sociales este estudio aparece casi siempre, a veces con una función abstracta y a veces con un modelo de costes, beneficios, poblaciones o concentraciones. Aquí reunirás todo lo que sabes de límites y derivadas en un esquema ordenado.

Dominio y puntos de corte

Definición: dominio

El **dominio** de f es el conjunto de valores de x para los que $f(x)$ existe. En un polinomio es $\mathbb{R}$; en una racional se excluyen los ceros del denominador; en $\sqrt{g}$ hace falta $g \geq 0$; en $\ln g$ hace falta $g > 0$.

Definición: puntos de corte

Con el eje Y: $(0, f(0))$. Con el eje X: las soluciones de $f(x) = 0$.

Ejemplo 1

Halla el dominio de $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$ y de $g(x) = \ln(x-1)$.

$x^2 - 4 = 0$ en $x = \pm 2$, luego $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. Para g, $x - 1 > 0$, luego $\operatorname{Dom} g = (1, +\infty)$.

Ejemplo 2

Cortes de $f(x) = x^3 - 4x$ con los ejes.

Eje Y: $f(0) = 0$. Eje X: $x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0, \ \pm 2$. Puntos $(0,0)$, $(2,0)$ y $(-2,0)$.

Asíntotas y comportamiento en el infinito

Regla: asíntotas

Vertical $x = a$ si $\lim_{x \to a} f = \pm\infty$ (ceros del denominador). Horizontal $y = L$ si $\lim_{x \to \pm\infty} f = L$. Oblicua $y = mx + n$ si el grado del numerador supera en uno al del denominador (se halla dividiendo). Un polinomio no tiene asíntotas: sus límites en el infinito son infinitos.

Monotonía, extremos y curvatura

Propiedad: monotonía y extremos

$f' > 0$: creciente; f': decreciente. Un máximo relativo es un punto donde f' pasa de $+$ a $-$; un mínimo relativo, de $-$ a $+$. Los candidatos son las soluciones de $f'(x) = 0$ y los puntos donde f' no existe.

Propiedad: curvatura

$f'' > 0$: convexa (∪); f'': cóncava (∩). Un **punto de inflexión** es donde cambia la curvatura, con $f'' = 0$.

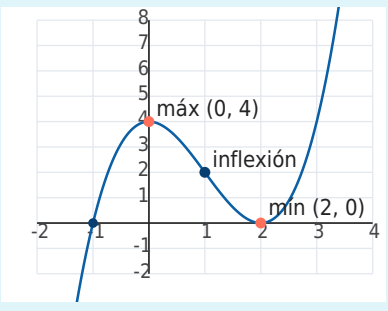
Método: estudio completo de una función

1. Halla el dominio y los puntos de corte con los ejes.
2. Calcula las asíntotas y los límites en los extremos del dominio.
3. Deriva: resuelve $f' = 0$, estudia el signo de f' y obtén intervalos de crecimiento y extremos.
4. Calcula f'' y estudia la curvatura y los puntos de inflexión.
5. Haz una tabla de valores y dibuja la gráfica con todos los datos.

Ejemplo 3

Estudia $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

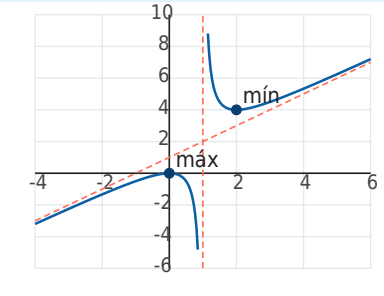
Dominio $\mathbb{R}$. Cortes: $f(0) = 4$; $f(x) = (x+1)(x-2)^2 = 0$ en $x = -1$ y $x = 2$. $f'(x) = 3x(x-2)$: crece en $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, decrece en $(0, 2)$; máximo $(0, 4)$, mínimo $(2, 0)$. $f''(x) = 6x - 6$: cóncava en $(-\infty, 1)$, convexa en $(1, \infty)$; inflexión en $(1, 2)$.



Ejemplo 4

Estudia $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

Dominio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Corte en $(0,0)$. Asíntota vertical $x = 1$. Como $\dfrac{x^2}{x-1} = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$, la oblicua es $y = x + 1$. $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$, que se anula en $x = 0$ y $x = 2$: crece en $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, decrece en $(0,1) \cup (1,2)$. Máximo relativo $(0,0)$ y mínimo relativo $(2,4)$.



Ejemplo 5

Estudia la monotonía de $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$.

$f'(x) = \dfrac{(x+2) - (x-1)}{(x+2)^2} = \dfrac{3}{(x+2)^2} > 0$. Es creciente en $(-\infty, -2)$ y en $(-2, \infty)$, sin extremos. Asíntotas: $x = -2$ y $y = 1$.

¡Atención!

Un punto con $f'(x) = 0$ no es siempre extremo: en x^3 la derivada se anula en 0 y no hay máximo ni mínimo. Hay que comprobar el cambio de signo. Además, los intervalos de crecimiento no deben incluir puntos fuera del dominio.

Funciones exponenciales y logarítmicas

Propiedad: exponencial y logaritmo

e^x es siempre positiva y creciente, con asíntota horizontal $y = 0$ cuando $x \to -\infty$. $\ln x$ existe para $x > 0$, es creciente y tiene asíntota vertical $x = 0$. Funciones como xe^x o x^2e^{-x} se estudian con la derivada del producto.

Ejemplo 6

Estudia los extremos de $f(x) = xe^x$.

$f'(x) = e^x(x+1)$, que se anula en $x = -1$. Decrece en $(-\infty, -1)$ y crece en $(-1, \infty)$. Mínimo en $\left(-1, -\frac{1}{e}\right) \approx (-1;\ -0{,}37)$. Cuando $x \to -\infty$, $f \to 0$: asíntota $y = 0$.

Ejemplo 7

Los ingresos de una empresa (miles de euros) en el mes t son $I(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$, con $0 \le t \le 6$. ¿Cuándo hay máximo y mínimo relativos?

$I'(t) = 3t^2 - 18t + 24 = 3(t-2)(t-4)$. Crece en $(0, 2)$, decrece en $(2, 4)$ y crece en $(4, 6)$. Máximo relativo en $t = 2$ con $I = 20$ y mínimo relativo en $t = 4$ con $I = 16$.

Ejemplo 8

Estudia la curvatura de $f(x) = x^3 - 3x^2$ y halla su inflexión.

$f''(x) = 6x - 6$: negativa para x (cóncava) y positiva para $x > 1$ (convexa). Inflexión en $(1, f(1)) = (1, -2)$.

Ejemplo 9

El coste medio de producir $x > 0$ unidades es $\bar{C}(x) = x + \frac{4}{x}$. Halla asíntotas y mínimo.

Vertical $x = 0$; oblicua $y = x$, pues $\bar{C} - x = \frac{4}{x} \to 0$. $\bar{C}'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 2$: decrece en $(0, 2)$, crece en $(2, \infty)$. Mínimo $\bar{C}(2) = 4$.

Observación

En la PAU de Ciencias Sociales se pide el estudio de una función polinómica o racional sencilla (dominio, cortes, asíntotas, monotonía, extremos y, a veces, curvatura) y su representación, o bien interpretar una gráfica dada en un contexto económico.

El esquema completo paso a paso

Método: estudio completo de una función

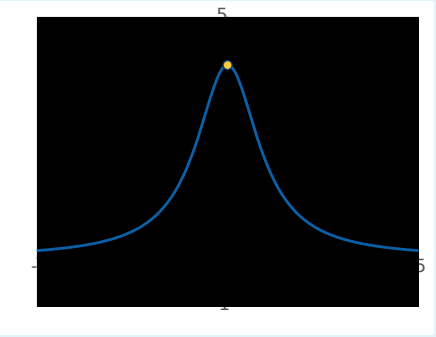
1. **Dominio**: excluye los ceros de los denominadores, los valores que hacen negativo un radicando de índice par y los que hacen no positivo el argumento de un logaritmo.
2. **Cortes y signo**: calcula $f(0)$ y resuelve $f(x) = 0$; con los ceros y los puntos fuera del dominio, estudia el signo en cada intervalo.

3. **Simetría**: si $f(-x) = f(x)$ es par; si $f(-x) = -f(x)$ es impar.
4. **Asíntotas**: verticales en los puntos donde el límite es infinito; horizontal si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ es finito; oblicua $y = mx + n$ con $m = \lim \dfrac{f(x)}{x}$ y $n = \lim(f(x) - mx)$.
5. **Monotonía y extremos**: signo de f'.
6. **Curvatura e inflexión**: signo de f''.
7. **Tabla y gráfica**: dibuja primero las asíntotas y los puntos notables y después une los tramos respetando la tabla.

Ejemplo 10

Estudia y representa $f(x) = \dfrac{4}{x^2+1}$.

Dominio $\mathbb{R}$, porque $x^2 + 1 > 0$. Corte con el eje Y: $(0, 4)$; no corta al eje X y es siempre positiva. Es par, ya que $f(-x) = f(x)$. Asíntota horizontal $y = 0$, porque el denominador tiene mayor grado. $f'(x) = \dfrac{-8x}{(x^2+1)^2}$: crece si x y decrece si $x > 0$, con máximo en $(0, 4)$. La gráfica tiene forma de campana:



Funciones en contexto

Observación: el dominio del contexto

Cuando la función describe una situación real (beneficios, ventas, temperaturas, concentraciones), el dominio no es solo el matemático: el tiempo, las unidades producidas o el dinero invertido no pueden ser negativos y a menudo tienen un máximo físico. Por eso los extremos hay que buscarlos también en los extremos del intervalo de definición, y las asíntotas se interpretan como comportamientos a largo plazo: una asíntota horizontal en una función de ventas indica saturación del mercado; en una de concentración, eliminación de una sustancia; en una de coste medio, el coste variable por unidad.

Ejemplo 11

El número de visitantes, en miles, de una exposición t días después de

inaugurarse es $V(t) = \dfrac{30t}{t+5}$. ¿Qué ocurre a largo plazo? ¿Crece siempre?

$\lim_{t\to\infty} \dfrac{30t}{t+5} = 30$: el total se acerca a 30 000 visitantes.
$V'(t) = \dfrac{30(t+5) - 30t}{(t+5)^2} = \dfrac{150}{(t+5)^2} > 0$: crece siempre, pero cada vez más despacio, porque la derivada disminuye.

Regla: asíntotas de las funciones racionales

Para $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ya simplificada, las asíntotas verticales están en los ceros de Q. La horizontal y la oblicua dependen de los grados: si el grado de P es menor que el de Q, la asíntota horizontal es $y = 0$; si son iguales, es $y = \dfrac{a}{b}$, cociente de los coeficientes principales; si el grado de P supera en una unidad al de Q, hay asíntota oblicua, que es el cociente de la división $P : Q$; y si lo supera en dos o más unidades, no hay asíntotas horizontales ni oblicuas. Una función nunca tiene a la vez asíntota horizontal y oblicua por el mismo lado. Antes de buscar asíntotas verticales conviene simplificar la fracción: si un valor anula a la vez el numerador y el denominador, puede que en ese punto haya solo un agujero en la gráfica y no una asíntota.

¡Atención!

Errores típicos: olvidar los puntos excluidos del dominio al hacer la tabla de signos (en ellos puede cambiar el signo de f' sin que haya extremo); llamar extremo a un punto donde $f' = 0$ pero la derivada no cambia de signo, como en $f(x) = x^3$; confundir convexa ($\cup$) con cóncava ($\cap$); y dibujar la gráfica cortando una asíntota vertical. Una asíntota horizontal, en cambio, sí puede cortarse en valores finitos de x.

¿Sabías que?

La idea de representar una relación entre dos magnitudes con una curva se debe a René Descartes y Pierre de Fermat, que en el siglo XVII unieron el álgebra y la geometría con los ejes de coordenadas. El modelo logístico, con su característica forma de S, lo propuso el matemático belga Pierre-François Verhulst en 1838 para describir el crecimiento de la población; hoy se usa para estudiar la difusión de una aplicación, de una moda o de una epidemia.

El consejo de Otto

Antes de dibujar, ordena todos los datos en una tabla: cortes, asíntotas, extremos e inflexiones. Marca primero esos puntos y las asíntotas con líneas discontinuas; después, unir los puntos siguiendo el signo de f' es muy fácil.