Ejercicios - Representación de funciones

Curso: 2 Bachillerato Ccss · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Dominio de una función

Antes de estudiar una función hay que saber dónde está definida.

a. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$
b. $g(x) = \sqrt{6-2x}$
c. $h(x) = \ln(x-1)$
d. $k(x) = \dfrac{e^x}{x}$

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Cortes con los ejes y signo

Sea $f(x) = x^3 - 4x$.

a. Halla los puntos de corte con los ejes.
b. Estudia el signo de f en cada intervalo.
c. Estudia la simetría de f.

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Asíntotas de una función racional

Sea $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$.

a. Halla la asíntota vertical y estudia los límites laterales.
b. Halla la asíntota horizontal.
c. Halla los cortes con los ejes.

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Asíntota oblicua

Sea $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$.

a. Halla la asíntota vertical.

b. Comprueba que $f(x) = x + 1 + \dfrac{2}{x-1}$ y deduce la asíntota oblicua.
c. Estudia la posición de la gráfica respecto de la asíntota oblicua.

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Monotonía y extremos

Sea $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

a. Calcula $f'(x)$ y sus ceros.
b. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c. Halla los extremos relativos.

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Curvatura y punto de inflexión

Continúa con $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

a. Calcula $f''(x)$.
b. Estudia la curvatura de f.
c. Halla el punto de inflexión.
d. Haz un esbozo de la gráfica con todos los datos.

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – El beneficio de una empresa

El beneficio mensual de una empresa de mochilas, en miles de euros, es $B(x) = -x^2 + 40x - 300$, donde x son los cientos de mochilas vendidas ($0 \leq x \leq 45$).

a. ¿Para qué ventas hay beneficio positivo?
b. ¿Cuántas mochilas hay que vender para obtener el beneficio máximo? ¿Cuál es?
c. ¿Qué beneficio hay si no se vende nada? Interprétalo.
d. Representa la función.

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – El coste medio de fabricación

Un taller de cerámica de Talavera fabrica jarrones. El coste total de fabricar x jarrones es $C(x) = x^2 + 100$ euros, de modo que el coste medio por jarrón es $M(x) = \dfrac{C(x)}{x} = x + \dfrac{100}{x}$, con $x > 0$.

a. Halla las asíntotas de M.
b. Estudia la monotonía de M y halla su mínimo.

c. ¿Cuántos jarrones conviene fabricar para que el coste medio sea mínimo? ¿Cuál es ese coste?
d. Interpreta la asíntota oblicua.

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – Un medicamento en la sangre

La concentración de un medicamento en la sangre, en mg/l, t horas después de tomarlo es $C(t) = 20t\,e^{-t/2}$, con $t \geq 0$.

a. Calcula $C(0)$ y el límite de $C(t)$ cuando $t \to +\infty$. Interprétalos.
b. ¿En qué momento es máxima la concentración? ¿Cuánto vale?
c. Halla el punto de inflexión e interprétalo.
d. Representa la función.

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – La audiencia de un programa de radio

Durante un maratón solidario de 6 horas, la audiencia de una emisora de radio, en miles de oyentes, viene dada por $A(t) = -t^3 + 6t^2$, donde t son las horas desde el inicio ($0 \leq t \leq 6$).

a. ¿Cuántos oyentes hay al principio y al final?
b. ¿En qué momento la audiencia es máxima? ¿Cuántos oyentes hay entonces?
c. ¿En qué momento crece la audiencia más deprisa? ¿A qué ritmo?
d. Representa la función en $[0, 6]$.

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – Estudio de una exponencial

Estudia la función $f(x) = xe^x$.

a. Dominio, cortes con los ejes y signo.
b. Comportamiento en $\pm\infty$ y asíntotas.
c. Monotonía y extremos.
d. Curvatura e inflexión.

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – Estudio de una función logarítmica

Estudia la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

a. Halla el dominio y el corte con el eje X.

b. Halla las asíntotas.
c. Estudia la monotonía y el extremo.
d. Explica por qué la función es positiva para $x > 1$.

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – Las ventas de un videojuego

Las ventas semanales de un videojuego, en miles de unidades, t semanas después de su lanzamiento son $V(t) = \dfrac{50t}{t^2 + 4}$.

a. ¿En qué semana se alcanzan las ventas máximas? ¿Cuántas son?
b. ¿Qué ocurre con las ventas a largo plazo?
c. ¿Durante qué semanas se venden al menos 10 000 unidades?
d. Representa la función.

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – Hallar una función a partir de sus propiedades

Se busca una función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ que tenga extremos relativos en $x = -1$ y $x = 3$ y que corte al eje Y en el punto $(0, 5)$.

a. Plantea las ecuaciones que deben cumplir a, b y c.
b. Resuelve el sistema.
c. Indica cuál de los extremos es máximo y cuál mínimo y calcula sus coordenadas.

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – Problema: estudio completo de una función racional

En la prueba de acceso es habitual pedir el estudio completo de una función y su gráfica. Estudia $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 2}$ siguiendo el esquema del tema y resume los resultados en una tabla.

a. Dominio y cortes con los ejes.
b. Asíntotas (vertical, horizontal y oblicua) y posición de la gráfica.
c. Monotonía y extremos.
d. Curvatura.
e. Tabla resumen y gráfica.

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – Problema: producción y beneficio de una cooperativa

Una cooperativa de aceite de Jaén estima que el coste de producir x miles de litros de

aceite es $C(x) = x^3 - 9x^2 + 30x$ miles de euros, con $0 \leq x \leq 8$. Vende cada mil litros a 15 mil euros. Quiere saber qué producción le conviene y cuál es su coste medio mínimo.

a. Comprueba que el beneficio es $B(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x$.
b. Estudia la monotonía de B y halla su máximo y su mínimo relativos.
c. ¿Para qué producciones hay beneficio positivo? (redondea a tres decimales)
d. Halla la producción con coste medio $M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ mínimo y ese coste medio.
e. ¿Coincide la producción de coste medio mínimo con la de beneficio máximo? Explica por qué.

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – Problema: la temperatura de un horno de cerámica

Un horno de un taller de cerámica se calienta, se mantiene y se enfría según la función (temperatura en °C y tiempo t en minutos):

$$T(t) = \begin{cases} 20 + 30t & \text{si } 0 \leq t \leq 6 \\ 200 & \text{si } 610 \end{cases}$$

a. Comprueba que la función es continua en $t = 6$ y en $t = 10$.
b. Calcula la temperatura a los 3 minutos y a los 15 minutos.
c. ¿Hacia qué temperatura tiende el horno cuando pasa mucho tiempo? ¿Qué representa?
d. ¿Cuándo baja la temperatura de 50 °C? (redondea a centésimas)
e. Describe la monotonía de la función en cada tramo.

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Problema: los usuarios de una aplicación

Una empresa de Barcelona lanza una aplicación para compartir bicicletas. El número de usuarios, en miles, t meses después del lanzamiento sigue el modelo logístico $U(t) = \dfrac{120}{1 + 5e^{-0{,}4t}}$. El equipo de márketing quiere saber cuándo se frena el crecimiento.

a. ¿Cuántos usuarios hay en el lanzamiento? ¿Y a los 10 meses?
b. Calcula $\lim_{t \to \infty} U(t)$ e interprétalo.
c. Comprueba que $U'(t) = \dfrac{240e^{-0{,}4t}}{(1 + 5e^{-0{,}4t})^2}$ y justifica que U siempre crece.
d. ¿Cuándo se alcanzan 60 000 usuarios? En ese momento la función tiene un punto de inflexión. ¿Qué significa?
e. ¿Recomendarías invertir en publicidad después del mes 12? Razónalo.

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Problema: la curva de aprendizaje

Un trabajador nuevo de una fábrica de muebles de Valencia monta estanterías. El tiempo, en minutos, que tarda en montar una estantería después de haber montado n es $T(n) = \dfrac{an + 30}{n + 1}$. Se sabe que, con mucha práctica, el tiempo se acerca a 2 minutos.

a. Calcula a.
b. ¿Cuánto tarda en montar la primera estantería ($n = 0$)?
c. Estudia la monotonía de T y explica su significado.
d. ¿A partir de qué estantería tarda menos de 5 minutos?
e. ¿Puede llegar a tardar menos de 2 minutos? Justifícalo.

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: la función exponencial entre x

Estudia completamente la función $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ y represéntala.

a. Dominio, cortes con los ejes y signo.
b. Asíntotas.
c. Monotonía y extremos.
d. Curvatura (ayuda: $f''(x) = \dfrac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}$).
e. Gráfica.