Soluciones - Representación de funciones

Curso: 2 Bachillerato Ccss

Solución del ejercicio 1

a. Se excluyen los ceros del denominador: $x^2 - 4 = 0$ da $x = \pm 2$. $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.
b. El radicando debe ser no negativo: $6 - 2x \geq 0$, $x \leq 3$. $\operatorname{Dom} g = (-\infty, 3]$.
c. El argumento del logaritmo debe ser positivo: $x - 1 > 0$, $x > 1$. $\operatorname{Dom} h = (1, +\infty)$.
d. La exponencial existe siempre; solo se excluye $x = 0$. $\operatorname{Dom} k = \mathbb{R} - \{0\}$.

Solución del ejercicio 2

a. Eje Y: $f(0) = 0$, punto $(0, 0)$. Eje X: $x^3 - 4x = x(x-2)(x+2) = 0$, puntos $(-2, 0)$, $(0, 0)$ y $(2, 0)$.
b. Probando un valor en cada intervalo: $f(-3) = -15$, $f(-1) = 3 > 0$, $f(1) = -3$, $f(3) = 15 > 0$. Negativa en $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$ y positiva en $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$.
c. $f(-x) = -x^3 + 4x = -f(x)$: es impar, simétrica respecto del origen.

Solución del ejercicio 3

a. El denominador se anula en $x = 3$ y el numerador no ($7 \neq 0$): asíntota vertical $x = 3$. $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \dfrac{7}{0^+} = +\infty$ y $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \dfrac{7}{0^-} = -\infty$.
b. $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x+1}{x-3} = 2$ (mismo grado, cociente de coeficientes principales): asíntota horizontal $y = 2$.
c. $f(0) = -\dfrac{1}{3}$, punto $\left(0, -\dfrac{1}{3}\right)$; $2x + 1 = 0$ da $\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$.

Solución del ejercicio 4

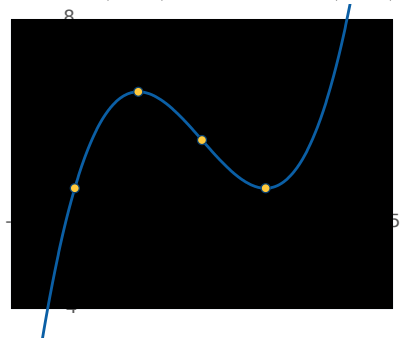
a. $x = 1$, porque el denominador se anula y el numerador vale 2.
b. Dividiendo $x^2 + 1$ entre $x - 1$: cociente $x + 1$ y resto 2. Como $\dfrac{2}{x-1} \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$, la asíntota oblicua es $y = x + 1$.
c. $f(x) - (x+1) = \dfrac{2}{x-1}$: positivo si $x > 1$ (la gráfica va por encima) y negativo si x (va por debajo).

Solución del ejercicio 5

a. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$; se anula en $x = 1$ y $x = 3$.
b. $f'(0) = 9 > 0$, $f'(2) = -3$, $f'(4) = 9 > 0$. Crece en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y decrece en $(1, 3)$.
c. Máximo relativo en $(1, f(1)) = (1, 5)$ y mínimo relativo en $(3, f(3)) = (3, 1)$.

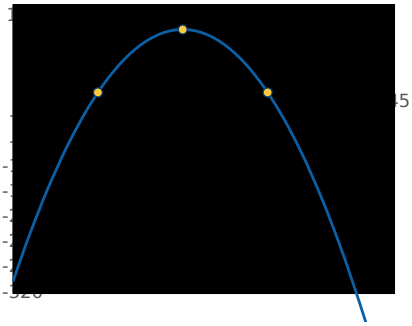
Solución del ejercicio 6

a. $f''(x) = 6x - 12$.
b. f'' si x: cóncava ($\cap$) en $(-\infty, 2)$. $f'' > 0$ si $x > 2$: convexa ($\cup$) en $(2, +\infty)$.
c. En $x = 2$ cambia la curvatura: punto de inflexión $(2, f(2)) = (2, 3)$.
d. Máximo $(1, 5)$, inflexión $(2, 3)$, mínimo $(3, 1)$ y corte con el eje Y en $(0, 1)$:



Solución del ejercicio 7

a. $-x^2 + 40x - 300 = 0$ da $x = 10$ y $x = 30$. Como la parábola abre hacia abajo, $B > 0$ entre 1 000 y 3 000 mochilas.
b. $B'(x) = -2x + 40 = 0$ en $x = 20$; $B'' = -2$, máximo. Hay que vender 2 000 mochilas y el beneficio es $B(20) = 100$ miles de euros.
c. $B(0) = -300$: pérdidas de 300 000 €, que corresponden a los costes fijos.
d. Parábola con vértice $(20, 100)$ y cortes $(10, 0)$ y $(30, 0)$:

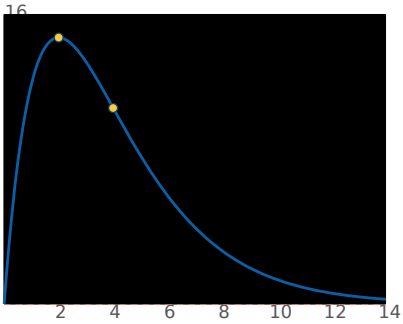


Solución del ejercicio 8

a. Vertical: $x = 0$, pues $\lim_{x \to 0^+} M(x) = +\infty$. Oblicua: $y = x$, porque $M(x) - x = \dfrac{100}{x} \to 0$.
b. $M'(x) = 1 - \dfrac{100}{x^2} = 0$ da $x = 10$ ($x > 0$). M' en $(0, 10)$ y $M' > 0$ en $(10, +\infty)$: decrece y luego crece; mínimo en $x = 10$.
c. 10 jarrones, con $M(10) = 10 + 10 = 20$ € por jarrón.
d. Para muchos jarrones el coste fijo de 100 € apenas pesa y el coste medio se parece a x: crece porque el coste variable x^2 crece más deprisa que la producción.

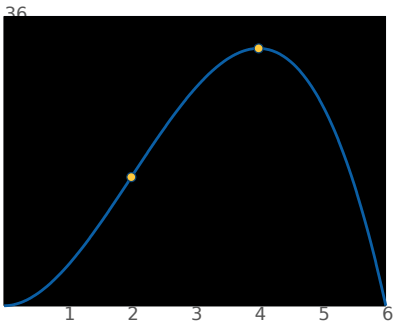
Solución del ejercicio 9

a. $C(0) = 0$: al principio no hay medicamento. $\lim_{t \to +\infty} 20te^{-t/2} = 0$ (la exponencial domina): el medicamento se elimina y hay asíntota horizontal $y = 0$.
b. $C'(t) = 20e^{-t/2}\left(1 - \dfrac{t}{2}\right) = 0$ da $t = 2$. Crece en $(0, 2)$ y decrece después: máximo a las 2 horas, $C(2) = 40e^{-1} \approx 14{,}715$ mg/l.
c. $C''(t) = 20e^{-t/2}\left(\dfrac{t}{4} - 1\right) = 0$ da $t = 4$, $C(4) = 80e^{-2} \approx 10{,}827$. A las 4 horas la concentración baja más deprisa que en ningún otro momento; después la bajada se va frenando.
d. Gráfica:



Solución del ejercicio 10

a. $A(0) = 0$ y $A(6) = -216 + 216 = 0$: el programa empieza y termina sin oyentes registrados.
b. $A'(t) = -3t^2 + 12t = -3t(t - 4)$; en $(0, 4)$ es positiva y en $(4, 6)$ negativa. Máximo en $t = 4$: $A(4) = -64 + 96 = 32$ miles de oyentes.
c. El ritmo es $A'(t)$, que es máximo donde $A''(t) = -6t + 12 = 0$, en $t = 2$ (punto de inflexión). Ritmo: $A'(2) = -12 + 24 = 12$ miles de oyentes por hora.
d. Gráfica:



Solución del ejercicio 11

a. Dominio $\mathbb{R}$. Único corte $(0,0)$. Como $e^x > 0$, el signo es el de x: negativa para x y positiva para $x > 0$.

b. $\lim_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$: asíntota horizontal $y = 0$ por la izquierda.

c. $f'(x) = e^x(x+1)$: decrece en $(-\infty,-1)$ y crece en $(-1,+\infty)$. Mínimo en $\left(-1,-\dfrac{1}{e}\right) \approx (-1;\ -0{,}368)$.

d. $f''(x) = e^x(x+2)$: cóncava ($\cap$) en $(-\infty,-2)$ y convexa ($\cup$) en $(-2,+\infty)$. Inflexión en $\left(-2,-\dfrac{2}{e^2}\right) \approx (-2;\ -0{,}271)$.

Solución del ejercicio 12

a. $\mathrm{Dom}\, f = (0,+\infty)$. $\ln x = 0$ da $x = 1$: punto $(1,0)$.

b. Vertical $x = 0$, porque $\lim_{x\to0^+} \dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{-\infty}{0^+} = -\infty$. Horizontal $y = 0$, porque el logaritmo crece mucho más despacio que x.

c. $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$, que se anula en $x = e$. Crece en $(0,e)$ y decrece en $(e,+\infty)$: máximo $\left(e,\dfrac{1}{e}\right) \approx (2{,}718;\ 0{,}368)$.

d. Para $x > 1$, $\ln x > 0$ y $x > 0$, así que el cociente es positivo.

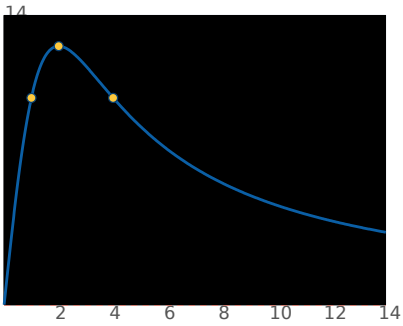
Solución del ejercicio 13

a. $V'(t) = \dfrac{50(t^2+4) - 50t\cdot 2t}{(t^2+4)^2} = \dfrac{50(4-t^2)}{(t^2+4)^2}$, que se anula en $t = 2$. Crece en $(0,2)$ y decrece después: máximo en la semana 2, $V(2) = \dfrac{100}{8} = 12{,}5$ miles.

b. $\lim_{t\to\infty} \dfrac{50t}{t^2+4} = 0$: las ventas tienden a desaparecer (asíntota $y = 0$).

c. $\dfrac{50t}{t^2+4} \geq 10$ equivale a $t^2 - 5t + 4 \leq 0$, es decir, $(t-1)(t-4) \leq 0$: entre la semana 1 y la semana 4.

d. Gráfica:



Solución del ejercicio 14

a. $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$. Condiciones: $f'(-1) = 3 - 2a + b = 0$, $f'(3) = 27 + 6a + b = 0$ y $f(0) = c = 5$.

b. Restando las dos primeras: $24 + 8a = 0$, $a = -3$; entonces $b = 2a - 3 = -9$. Por tanto $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

c. $f''(x) = 6x - 6$: $f''(-1) = -12$, máximo $(-1, 10)$; $f''(3) = 12 > 0$, mínimo $(3, -22)$.

Solución del ejercicio 15

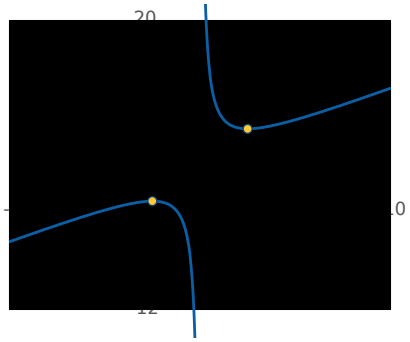
a. $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{2\}$. Único corte: $(0, 0)$.

b. Vertical $x = 2$: $\lim\limits_{x \to 2^-} f = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} f = +\infty$. No hay horizontal (el grado del numerador es mayor). Oblicua: $f(x) = x + 2 + \dfrac{4}{x-2}$, asíntota $y = x + 2$; la gráfica va por encima si $x > 2$ y por debajo si x.

c. $f'(x) = \dfrac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$. Crece en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ y decrece en $(0, 2) \cup (2, 4)$. Máximo $(0, 0)$ y mínimo $(4, 8)$.

d. $f''(x) = \dfrac{8}{(x-2)^3}$: cóncava ($\cap$) en $(-\infty, 2)$ y convexa ($\cup$) en $(2, +\infty)$; no hay inflexión porque $x = 2$ no está en el dominio.

x	$(-\infty, 0)$	**0**	$(0, 2)$	**2**	$(2, 4)$	**4**	$(4, +\infty)$
f'	+	0	−	no existe	−	0	+
f	crece	máx. 0	decrece	AV	decrece	mín. 8	crece

e. 

Solución del ejercicio 16

a. $B(x) = 15x - C(x) = 15x - x^3 + 9x^2 - 30x = -x^3 + 9x^2 - 15x$.
b. $B'(x) = -3x^2 + 18x - 15 = -3(x-1)(x-5)$. Decrece en $(0,1)$, crece en $(1,5)$ y decrece en $(5,8)$. Mínimo relativo $(1,-7)$ y máximo relativo $(5,25)$: con 5 000 litros gana 25 000 €.
c. $B(x) = -x(x^2 - 9x + 15)$ y $x^2 - 9x + 15 = 0$ da $x = \dfrac{9 \pm \sqrt{21}}{2}$, es decir, $2{,}209$ y $6{,}791$. Hay beneficio entre unos 2 209 y 6 791 litros.
d. $M(x) = x^2 - 9x + 30$; $M'(x) = 2x - 9 = 0$ en $x = 4{,}5$, y $M(4{,}5) = 20{,}25 - 40{,}5 + 30 = 9{,}75$ miles de euros por mil litros.
e. No: el coste medio es mínimo con 4 500 litros, pero el beneficio sigue aumentando hasta 5 000, porque mientras el precio (15) supera el coste de producir un poco más, conviene seguir produciendo aunque el coste medio suba.

Solución del ejercicio 17

a. En $t = 6$: $20 + 30 \cdot 6 = 200$, que coincide con el valor del segundo tramo. En $t = 10$: $20 + 180e^{0} = 200$. Es continua en los dos puntos.
b. $T(3) = 20 + 90 = 110$ °C. $T(15) = 20 + 180e^{-1} \approx 20 + 66{,}22 = 86{,}22$ °C.
c. $\lim\limits_{t\to\infty}\left(20 + 180e^{-0{,}2(t-10)}\right) = 20$ °C: la temperatura ambiente del taller (asíntota horizontal $y = 20$).
d. $20 + 180e^{-0{,}2(t-10)}$ equivale a $e^{-0{,}2(t-10)}$, es decir, $t - 10 > 5\ln 6 \approx 8{,}96$. A partir de $t \approx 18{,}96$ minutos.
e. Crece de forma lineal en $(0,6)$, es constante en $(6,10)$ y decrece en $(10,+\infty)$ cada vez más despacio.

Solución del ejercicio 18

a. $U(0) = \dfrac{120}{6} = 20$ mil usuarios. $U(10) = \dfrac{120}{1 + 5e^{-4}} \approx 109{,}93$ mil.
b. Como $e^{-0{,}4t} \to 0$, $U(t) \to 120$: el mercado se satura en 120 000 usuarios (asíntota

$y = 120$).

c. La derivada de $1 + 5e^{-0{,}4t}$ es $5 \cdot (-0{,}4)e^{-0{,}4t} = -2e^{-0{,}4t}$. Por la regla del cociente, $U'(t) = \dfrac{0 - 120 \cdot (-2e^{-0{,}4t})}{(1 + 5e^{-0{,}4t})^2} = \dfrac{240e^{-0{,}4t}}{(1 + 5e^{-0{,}4t})^2}$, que es positiva por ser cociente de números positivos: U siempre crece.

d. $\dfrac{120}{1 + 5e^{-0{,}4t}} = 60$ da $5e^{-0{,}4t} = 1$, $t = \dfrac{\ln 5}{0{,}4} \approx 4{,}02$ meses. Es el momento de crecimiento más rápido; a partir de ahí el ritmo de altas disminuye.

e. Poco: a los 12 meses $U(12) \approx 115{,}26$ mil, el 96 % del máximo de 120 mil; la publicidad apenas puede atraer usuarios nuevos.

Solución del ejercicio 19

a. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{an + 30}{n + 1} = a$, luego $a = 2$ y $T(n) = \dfrac{2n + 30}{n + 1}$.

b. $T(0) = 30$ minutos.

c. $T'(n) = \dfrac{2(n + 1) - (2n + 30)}{(n + 1)^2} = \dfrac{-28}{(n + 1)^2}$: siempre decrece; con la práctica tarda cada vez menos, aunque la mejora es cada vez menor.

d. $\dfrac{2n + 30}{n + 1}$ equivale a $2n + 30$, $n > \dfrac{25}{3} \approx 8{,}33$. Desde $n = 9$ ($T(8) \approx 5{,}11$ y $T(9) = 4{,}8$).

e. No: $T(n) - 2 = \dfrac{28}{n + 1} > 0$ para todo n; la gráfica se acerca a la asíntota $y = 2$ por encima sin alcanzarla.

Solución del ejercicio 20

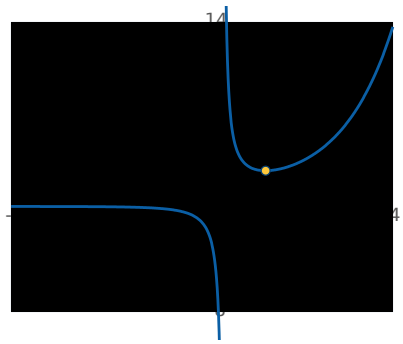
a. $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{0\}$. No corta los ejes ($e^x \neq 0$ y $x = 0$ no está en el dominio). Tiene el signo de x.

b. Vertical $x = 0$: $\lim\limits_{x \to 0^-} f = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f = +\infty$. Horizontal $y = 0$ cuando $x \to -\infty$. Cuando $x \to +\infty$, $f \to +\infty$ (la exponencial domina) y no hay asíntota oblicua, porque $\dfrac{f(x)}{x} \to +\infty$.

c. $f'(x) = \dfrac{e^x(x - 1)}{x^2}$: decrece en $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ y crece en $(1, +\infty)$. Mínimo relativo $(1, e) \approx (1;\ 2{,}718)$.

d. $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 > 0$, así que el signo de f segunda es el de x^3: cóncava ($\cap$) para x y convexa ($\cup$) para $x > 0$. No hay inflexión.

e. Gráfica:


14
4