Apuntes - Programación lineal

Curso: 2 Bachillerato Ccss

La programación lineal permite tomar decisiones óptimas con recursos limitados: cuántas unidades fabricar para obtener el máximo beneficio, o qué dieta cumple las necesidades con el mínimo coste. Aquí aprenderás a plantear, dibujar la región factible y optimizar.

Actividad de introducción: el puesto del mercadillo

Marta prepara pulseras y collares para vender en el mercadillo de los domingos. Cada pulsera necesita 10 minutos de trabajo y cada collar 20 minutos, y esta semana solo tiene 700 minutos libres. Además, solo le quedan cuentas para 50 piezas en total. Si gana 2 € por pulsera y 3 € por collar, ¿cuántas piezas de cada tipo le conviene preparar? Hay muchísimas combinaciones posibles, pero no todas cumplen las condiciones, y entre las que las cumplen solo una da el beneficio máximo. La programación lineal ofrece un método gráfico, rápido y seguro para encontrarla: se traducen las condiciones a inecuaciones, se dibuja la región de soluciones posibles y se comprueba la función de beneficio en sus esquinas.

Elementos de un problema

Definición: restricciones y región factible

Las **restricciones** son inecuaciones lineales $ax + by \leq c$ o $ax + by \geq c$ que limitan las variables x e y (casi siempre $x \geq 0$, $y \geq 0$). La **región factible** es el conjunto de puntos del plano que cumplen todas las restricciones; es siempre convexa.

Definición: función objetivo

La **función objetivo** $F(x, y) = px + qy$ mide el beneficio o el coste que se quiere maximizar o minimizar. La **solución óptima** es el punto de la región factible donde F alcanza su máximo o su mínimo.

Método: plantear un problema

1. Define las variables x e y con sus unidades.
2. Ordena los datos en una tabla (filas: productos; columnas: recursos).
3. Escribe cada restricción: «como máximo» es $\leq$ y «al menos» es $\geq$.
4. Añade $x \geq 0$, $y \geq 0$ y escribe la función objetivo.

Ejemplo 1

Una mesa usa 3 h de carpintería y una silla 2 h. Hay 120 h disponibles. Escribe la restricción.

Con x mesas e y sillas, las horas empleadas son $3x + 2y$ y no pueden superar 120: $3x + 2y \leq 120$.

La región factible

Método: representar una inecuación

1. Traza la recta frontera $ax + by = c$ con dos puntos (por ejemplo, los cortes con los ejes).
2. Elige un punto de prueba que no esté en la recta, normalmente el origen.
3. Si cumple la desigualdad, el semiplano solución es el que lo contiene; si no, el otro.
4. La región factible es la intersección de todos los semiplanos.

Ejemplo 2

Representa $2x + 3y \leq 12$.

La recta pasa por $(6, 0)$ y $(0, 4)$. El origen cumple $0 \leq 12$, luego el semiplano es el que contiene al origen. El punto $(3, 2)$ está en la frontera: $6 + 6 = 12$.

Teorema fundamental y método de resolución

Teorema: fundamental

Si la región factible es un polígono convexo acotado, la función objetivo alcanza su máximo y su mínimo en **vértices**. Si el óptimo se alcanza en dos vértices consecutivos, también se alcanza en todo el lado que los une (infinitas soluciones).

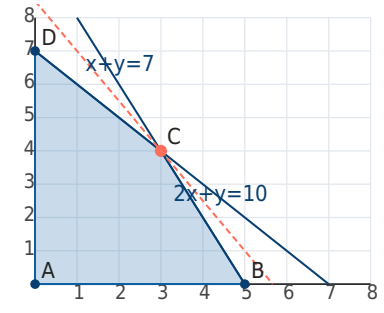
Método: resolver por vértices

1. Dibuja la región factible.
2. Calcula los vértices resolviendo sistemas con las rectas frontera.
3. Evalúa F en cada vértice.
4. Elige el mayor (máximo) o el menor (mínimo) valor.
5. Interpreta el resultado en el contexto del problema.

Ejemplo 3

Maximiza $F = 3x + 2y$ con $x + y \leq 7$, $2x + y \leq 10$, $x, y \geq 0$.

Vértices: $A(0, 0)$; $B(5, 0)$; $C(3, 4)$, de $x + y = 7$ y $2x + y = 10$; $D(0, 7)$. Valores: $F(A) = 0$, $F(B) = 15$, $F(C) = 17$, $F(D) = 14$. El máximo es 17 en $C(3, 4)$.



Observación

Método de las rectas de nivel: las rectas $px + qy = k$ son paralelas. Se dibuja una y se desplaza en paralelo; el último vértice que toca antes de salir de la región es el óptimo. En la figura, la recta discontinua es $3x + 2y = 17$.

Casos especiales

Propiedad: sin solución, múltiple, no acotada

Sin solución: la región factible está vacía. **Solución múltiple**: la recta de nivel es paralela a un lado y el óptimo se alcanza en todo ese lado. **No acotada**: en una región abierta F puede crecer sin límite y no existir máximo.

Propiedad: soluciones enteras

Si las variables son unidades indivisibles, la solución debe tener coordenadas enteras. No siempre es el vértice redondeado: hay que comprobar los puntos enteros cercanos de la región.

Ejemplo 4

Maximiza $F = x + y$ con $x + y \leq 5$, $x, y \geq 0$.

Vértices $(0,0)$, $(5,0)$, $(0,5)$: $F = 0, 5, 5$. El máximo 5 se alcanza en dos vértices consecutivos, luego en todo el segmento $x + y = 5$: infinitas soluciones.

Ejemplo 5

¿Tiene solución $x + y \leq 2$, $x + y \geq 5$?

Las rectas son paralelas y ningún punto cumple ambas condiciones: región vacía, sin solución.

¡Atención!

Errores típicos: olvidar $x \geq 0$, $y \geq 0$; invertir el sentido de una desigualdad; no comprobar que cada vértice cumple todas las restricciones; dar solo el valor óptimo sin decir en qué punto se alcanza ni qué significa.

Observación

En la PAU de Ciencias Sociales la programación lineal se pregunta con un enunciado económico: hay que plantear, dibujar la región, hallar los vértices y calcular el máximo o el mínimo. Presenta siempre una tabla de datos, el dibujo con ejes rotulados y la conclusión escrita.

La recta de nivel y la lectura gráfica

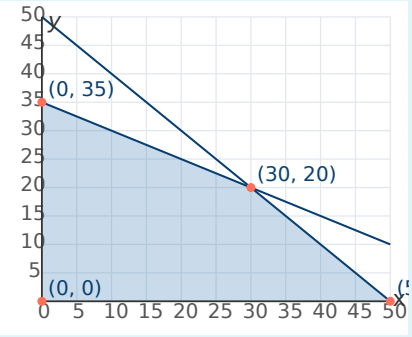
Definición: rectas de nivel

Para una función objetivo $F(x, y) = ax + by$, las rectas $ax + by = k$, con k variable, se llaman rectas de nivel. Todas son paralelas entre sí y, a lo largo de cada una, F toma el mismo valor k. Al desplazar la recta de nivel en el sentido en que crece k, el último punto de la región factible que toca es el máximo; el primero que toca es el mínimo. Este método gráfico confirma el resultado que da el cálculo en los vértices y ayuda a detectar los casos de infinitas soluciones, cuando la recta de nivel es paralela a un lado de la región.

Ejemplo 6

Resuelve la actividad de introducción: Marta prepara x pulseras e y collares con $10x + 20y \leq 700$, $x + y \leq 50$, $x, y \geq 0$, y quiere maximizar $F = 2x + 3y$.

Simplificamos $10x + 20y \leq 700$ a $x + 2y \leq 70$. Los vértices son $(0, 0)$, $(50, 0)$, $(0, 35)$ y el corte de $x + y = 50$ con $x + 2y = 70$: restando, $y = 20$ y $x = 30$. Evaluamos: $F(50, 0) = 100$, $F(30, 20) = 60 + 60 = 120$, $F(0, 35) = 105$. Le conviene preparar 30 pulseras y 20 collares, con 120 € de beneficio.



Soluciones enteras y análisis de los resultados

Método: comprobar y analizar la solución

1. Comprueba que el punto óptimo cumple todas las restricciones sustituyendo sus coordenadas.
2. Indica qué restricciones se cumplen con igualdad: son los recursos que se agotan.
3. Calcula cuánto sobra de los demás recursos (la holgura).
4. Si las variables deben ser enteras y el vértice no lo es, prueba los puntos enteros cercanos de la región.
5. Redacta la respuesta en el contexto: cuántas unidades, qué beneficio o coste y qué recursos sobran.

Ejemplo 7

En el ejemplo anterior, ¿le sobra tiempo o material a Marta con la solución óptima? ¿Y si hiciera solo 50 pulseras?

Con $(30, 20)$: tiempo $10 \cdot 30 + 20 \cdot 20 = 700$ minutos y piezas $30 + 20 = 50$; se agotan los dos recursos. Con $(50, 0)$: usa 500 minutos, le sobran 200, pero gana solo 100 €. Agotar los recursos más rentables suele ser la clave del óptimo.

Observación: organizar los datos en una tabla

En los problemas con enunciado largo conviene copiar los datos en una tabla antes de escribir ninguna inecuación: una fila por cada recurso (horas, kilos, dinero, plazas), una columna por cada variable y una última columna con la cantidad disponible o exigida. Cada fila de la tabla se convierte directamente en una restricción, y la fila de beneficios o costes da la función objetivo. Así es difícil olvidar una condición o intercambiar dos coeficientes. Después, antes de dibujar, simplifica cada inecuación dividiendo por un factor común (por ejemplo, $20x + 10y \geq 120$ se convierte en $2x + y \geq 12$): las rectas son las mismas y los cálculos de los vértices resultan mucho más sencillos. Por último, elige unas escalas en los ejes que permitan ver todos los puntos de corte. Un dibujo cuidado, con las rectas bien situadas y la región sombreada, evita confundir el semiplano correcto y permite comprobar a simple vista qué vértices son de verdad esquinas de la región.

¡Atención!

Errores frecuentes: olvidar las condiciones $x \geq 0$, $y \geq 0$; traducir mal «como máximo» ($\leq$) y «al menos» ($\geq$); dar como solución un punto de corte de dos rectas que no cumple el resto de restricciones; y responder solo con las coordenadas, sin el valor de la función objetivo ni la interpretación. Si la región no está acotada, comprueba si tiene sentido el máximo antes de calcularlo.

¿Sabías que?

La programación lineal nació a mediados del siglo XX. El matemático ruso Leonid Kantoróvich la utilizó en 1939 para organizar la producción de una fábrica de contrachapado, y el estadounidense George Dantzig inventó en 1947 el método

símplex, capaz de resolver problemas con miles de variables. Kantoróvich y Tjalling Koopmans recibieron el Premio Nobel de Economía en 1975. Hoy la usan las aerolíneas para asignar tripulaciones, las empresas de reparto para diseñar sus rutas y las redes eléctricas para decidir qué centrales funcionan cada hora.

El consejo de Otto

Después de calcular cada vértice, sustitúyelo en todas las restricciones. Y antes de empezar, escribe qué significan x e y.