Ejercicios - Programación lineal

Curso: 2 Bachillerato Ccss · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Representar semiplanos

Para dibujar una región factible hay que saber representar cada inecuación como un semiplano.

a. Representa la recta $2x + y = 8$ y decide qué semiplano corresponde a $2x + y \leq 8$ usando el punto $(0, 0)$.
b. Haz lo mismo con $x - y \geq -2$.
c. ¿Pertenece el punto $(3, 1)$ a la región definida por las dos inecuaciones? ¿Y el punto $(1, 5)$?

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Vértices y máximo

Considera la región definida por $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 6$ y $x + 2y \leq 8$.

a. Representa la región factible.
b. Calcula sus vértices.
c. Halla el máximo de $F(x, y) = 3x + 2y$ en la región.

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Una región no acotada

Sea la región $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \geq 4$, $x + 3y \geq 6$.

a. Dibuja la región y explica por qué no está acotada.
b. Calcula sus vértices.
c. Halla el mínimo de $F(x, y) = 2x + 3y$.
d. ¿Tiene F máximo en esta región?

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Infinitas soluciones

En la región del ejercicio 2 (vértices $(0, 0)$, $(6, 0)$, $(4, 2)$ y $(0, 4)$) se quiere maximizar $G(x, y) = x + 2y$.

a. Calcula G en cada vértice.
b. ¿Dónde se alcanza el máximo?

c. Explica por qué hay infinitas soluciones y da otra solución distinta de los vértices.

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Casos especiales

Estudia si cada uno de estos problemas tiene solución, con $x \geq 0$ e $y \geq 0$ en todos.

a. Maximizar $F = x + y$ con $x + y \leq 2$ y $x + y \geq 5$.
b. Maximizar $F = x + y$ con $x - y \leq 1$.
c. Minimizar $F = x + y$ con $x - y \leq 1$.

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – La carpintería de Cuenca

Una carpintería de Cuenca fabrica mesas (x) y sillas (y). Cada mesa necesita 2 horas de taller y 1 hora de barnizado; cada silla, 1 hora de taller y 1 hora de barnizado. Cada semana dispone de 40 horas de taller y 30 de barnizado. Gana 50 € por mesa y 30 € por silla.

a. Escribe las restricciones y la función objetivo.
b. Representa la región factible y calcula sus vértices.
c. ¿Cuántas mesas y sillas debe fabricar para maximizar el beneficio? ¿Cuál es ese beneficio?
d. ¿Sobran horas de taller o de barnizado en la solución óptima?

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – El pienso de la granja

Una granja de León mezcla dos piensos. Cada kilo del pienso A aporta 2 unidades de proteína y 1 de vitaminas; cada kilo del pienso B aporta 1 unidad de proteína y 3 de vitaminas. Cada animal necesita al día al menos 8 unidades de proteína y 9 de vitaminas. El pienso A cuesta 4 € el kilo y el B, 3 €.

a. Plantea el problema de minimizar el coste diario.
b. Calcula los vértices de la región factible.
c. ¿Qué mezcla es la más barata y cuánto cuesta?
d. ¿Se cubren exactamente las necesidades con esa mezcla?

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – Dos fondos de inversión

Una persona quiere invertir como máximo 30 000 € entre un fondo A, con una rentabilidad anual del 5 %, y un fondo B, más arriesgado, con una rentabilidad del 8 %. Su asesora le recomienda no poner en B más de 18 000 € ni más del doble de lo que

ponga en A. Trabaja en miles de euros.

a. Plantea las restricciones y la función objetivo.
b. Calcula los vértices de la región factible.
c. ¿Cuánto debe invertir en cada fondo para obtener la máxima rentabilidad? ¿Cuánto gana?
d. ¿Qué restricciones se cumplen con igualdad en el óptimo?

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – La empresa de mudanzas

Una empresa de mudanzas de Valladolid tiene que trasladar al menos 120 cajas. Una furgoneta grande lleva 20 cajas por viaje y cuesta 80 €; una pequeña lleva 10 cajas y cuesta 50 €. Solo hay 5 furgonetas grandes disponibles y conductores para 8 furgonetas en total.

a. Plantea el problema de minimizar el coste.
b. Calcula los vértices de la región factible.
c. ¿Cuántas furgonetas de cada tipo debe usar? ¿Cuál es el coste mínimo?
d. ¿Cuántas cajas se pueden trasladar con la solución óptima?

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – Lotes de cítricos

Una cooperativa citrícola de Castellón prepara dos lotes de regalo. El lote A lleva 3 kg de naranjas y 1 kg de mandarinas; el lote B, 2 kg de naranjas y 2 kg de mandarinas. Hoy dispone de 120 kg de naranjas y 80 kg de mandarinas. Gana 5 € por cada lote A y 6 € por cada lote B.

a. Plantea el problema.
b. Dibuja la región factible y halla sus vértices.
c. ¿Cuántos lotes de cada tipo maximizan el beneficio?
d. Si el beneficio del lote B bajara a 3 €, ¿cambiaría la solución?

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – Autobuses para la excursión

Un colegio de Toledo organiza una excursión para 400 alumnos. Una empresa ofrece autobuses de 50 plazas, a 600 € cada uno, y de 30 plazas, a 400 € cada uno. Dispone de 10 conductores y solo de 8 autobuses grandes.

a. Plantea el problema de minimizar el coste.
b. Calcula los vértices de la región factible.
c. ¿Qué combinación de autobuses es la más barata?
d. ¿Cuánto cuesta por alumno? ¿Quedan plazas vacías?

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – Tomates y pimientos en Almería

Un agricultor de Almería tiene 10 hectáreas de invernadero para tomates (x ha) y pimientos (y ha). Cada hectárea de tomates consume 4 000 m³ de agua al año y necesita 30 jornales; cada hectárea de pimientos consume 2 000 m³ y necesita 60 jornales. Dispone de 32 000 m³ de agua y de 480 jornales. El beneficio es de 3 000 € por hectárea de tomates y 4 000 € por hectárea de pimientos.

a. Escribe las restricciones simplificadas.
b. Calcula los vértices de la región factible.
c. ¿Cómo debe repartir el invernadero para maximizar el beneficio?
d. ¿Qué recurso le sobra en la solución óptima?

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – Campaña de publicidad

Una tienda de bicicletas de Pamplona prepara una campaña con anuncios de radio (x) y en redes sociales (y). Cada anuncio de radio llega a 3 000 personas y cuesta 200 €; cada anuncio en redes llega a 2 000 personas y cuesta 100 €. Quiere llegar al menos a 24 000 personas, emitir al menos 2 anuncios de radio y no más de 10 en redes.

a. Plantea el problema de minimizar el coste.
b. Calcula los vértices de la región factible.
c. ¿Cuál es la campaña más barata?
d. ¿Tiene sentido buscar la campaña más cara? Razónalo.

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – Entradas para el teatro

Un teatro de Salamanca vende x entradas de platea y y de anfiteatro (en decenas) para una función escolar. Como mucho caben 8 decenas de espectadores; las de anfiteatro no pueden superar 6 decenas y la diferencia entre platea y anfiteatro no puede ser mayor de 2 decenas.

a. Escribe las restricciones y calcula los vértices de la región.
b. Si cada decena de platea deja 20 € y cada decena de anfiteatro 30 €, maximiza la recaudación $F = 20x + 30y$.
c. Maximiza $G = x - y$ e interpreta el resultado.

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – Problema: los turrones de Jijona

Una pequeña fábrica de turrón de Jijona elabora cajas de turrón duro (x) y de turrón blando (y). La tabla indica los recursos que necesita cada caja y lo que hay disponible

para la próxima semana. Cada caja de turrón duro deja un beneficio de 4 € y cada caja de turrón blando, 5 €. La gerente quiere planificar la producción y saber qué pasaría si sube el precio del turrón duro.

Recurso	Caja de duro	Caja de blando	Disponible
Almendra (kg)	2	1	100
Miel (kg)	1	1	70
Horno (min)	1	3	180

a. Plantea el problema de programación lineal.
b. Dibuja la región factible y calcula sus vértices.
c. Halla la producción que maximiza el beneficio.
d. Si el beneficio del turrón duro subiera a 8 € por caja, ¿cuál sería la nueva producción óptima?
e. Explica por qué un cambio en los precios puede cambiar el vértice óptimo.

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – Problema: el abono del huerto

Un vivero de La Rioja quiere abonar sus parcelas con dos abonos. Cada saco del abono A aporta 3 kg de nitrógeno, 1 kg de fósforo y 1 kg de potasio; cada saco del abono B aporta 1 kg de nitrógeno, 1 kg de fósforo y 3 kg de potasio. Necesita al menos 12 kg de nitrógeno, 8 kg de fósforo y 12 kg de potasio. El saco A cuesta 10 € y el B, 8 €.

a. Organiza los datos en una tabla y plantea el problema.
b. Calcula los vértices de la región factible.
c. ¿Cuántos sacos de cada tipo debe comprar para gastar lo mínimo?
d. ¿Qué nutriente recibe más de lo necesario con esa compra?
e. ¿Por qué en este problema no tiene sentido buscar el máximo?

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – Problema: del almacén a las tiendas

Una cadena de librerías tiene dos almacenes: A, con 40 cajas de libros, y B, con 70 cajas. Debe enviar 50 cajas a la tienda T1 y 50 a la tienda T2. Los costes de transporte por caja aparecen en la tabla. Se llama x al número de cajas que van de A a T1 e y a las que van de A a T2.

Coste por caja	T1	T2
Almacén A	3 €	5 €
Almacén B	4 €	2 €

a. Expresa en función de x e y las cajas que salen de B hacia cada tienda.
b. Escribe todas las restricciones.
c. Comprueba que el coste total es $C = 300 - x + 3y$.

d. Calcula los vértices de la región y el reparto más barato.
e. ¿Cuántas cajas quedan en el almacén B?

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Problema: la mezcla de cafés

Una tostadora de café de Canarias prepara una mezcla con café natural (x kg) y café torrefacto (y kg). Por receta, la cantidad de torrefacto no puede superar a la de natural. Solo tiene 60 kg de café natural. Cada día debe preparar al menos 50 kg de mezcla y su envasadora no admite más de 100 kg. El beneficio es de 3 € por kilo de natural y 2 € por kilo de torrefacto.

a. Plantea las restricciones.
b. Calcula los vértices de la región factible.
c. ¿Qué mezcla da el beneficio máximo? ¿Y el mínimo?
d. ¿Qué porcentaje de torrefacto tiene la mezcla de beneficio máximo?
e. La tostadora decide producir siempre 100 kg. ¿Qué mezclas son posibles entonces?

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Problema: las habitaciones del viaje de fin de curso

Un instituto de Badajoz necesita alojar a 41 alumnos en un hotel de Granada. El hotel ofrece habitaciones dobles a 60 € la noche y triples a 75 € la noche, pero solo le quedan 15 dobles y 10 triples libres. Se quiere gastar lo menos posible.

a. Plantea el problema.
b. Calcula los vértices de la región factible y el mínimo sin tener en cuenta que las habitaciones son números enteros.
c. ¿Es válida esa solución? ¿Qué pasa si se redondea a 6 dobles y 10 triples?
d. Busca la mejor solución entera probando con 10, 9 y 8 habitaciones triples.
e. ¿Qué conclusión sacas sobre redondear la solución de un problema de programación lineal?

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: ¿cuánto debe valer una mesa?

Vuelve a la carpintería del ejercicio 6: región $2x + y \leq 40$, $x + y \leq 30$, $x, y \geq 0$, con vértices $(0, 0)$, $(20, 0)$, $(10, 20)$ y $(0, 30)$. Ahora el beneficio por silla sigue siendo 30 €, pero el beneficio por mesa es un valor p desconocido: $F = px + 30y$.

a. Escribe la pendiente de las rectas de nivel de F y las de los dos lados que llegan a $(10, 20)$.
b. ¿Para qué valores de p es $(10, 20)$ la solución óptima?
c. ¿Qué producción conviene si $p = 70$? ¿Y si $p = 20$?

d. ¿Qué ocurre exactamente cuando $p = 30$?