Soluciones - Programación lineal

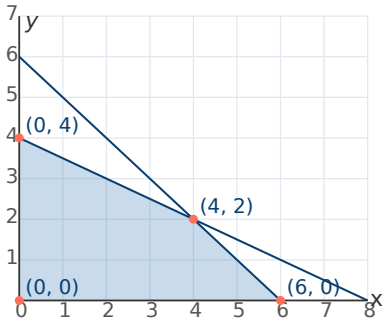
Curso: 2 Bachillerato Ccss

Solución del ejercicio 1

a. La recta pasa por $(0, 8)$ y $(4, 0)$. En $(0, 0)$: $0 \leq 8$ es cierto, luego el semiplano es el que contiene al origen (por debajo de la recta).
b. La recta $x - y = -2$ pasa por $(0, 2)$ y $(-2, 0)$. En $(0, 0)$: $0 \geq -2$ es cierto, luego el semiplano contiene al origen (por debajo de la recta).
c. $(3, 1)$: $2 \cdot 3 + 1 = 7 \leq 8$ y $3 - 1 = 2 \geq -2$; sí pertenece. $(1, 5)$: $2 + 5 = 7 \leq 8$, pero $1 - 5 = -4 \geq -2$ es falso; no pertenece.

Solución del ejercicio 2

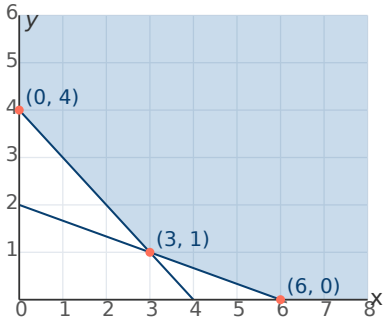
a. Es el cuadrilátero limitado por los ejes y las rectas $x + y = 6$ (de $(6, 0)$ a $(0, 6)$) y $x + 2y = 8$ (de $(8, 0)$ a $(0, 4)$):



b. $(0, 0)$, $(6, 0)$, $(0, 4)$ y el corte de $x + y = 6$ con $x + 2y = 8$: restando, $y = 2$ y $x = 4$, es decir, $(4, 2)$.
c. $F(0, 0) = 0$, $F(6, 0) = 18$, $F(4, 2) = 16$, $F(0, 4) = 8$. El máximo es 18, en $(6, 0)$.

Solución del ejercicio 3

a. Las dos inecuaciones son del tipo $\geq$, así que la región queda por encima de las rectas y se extiende sin límite hacia la derecha y hacia arriba:



b. $(0, 4)$, $(6, 0)$ y el corte de $x + y = 4$ con $x + 3y = 6$: restando, $2y = 2$, $y = 1$ y

$x = 3$: $(3, 1)$.

c. $F(0, 4) = 12$, $F(3, 1) = 9$, $F(6, 0) = 12$. El mínimo es 9, en $(3, 1)$.

d. No: F crece sin límite al alejarnos por la región (por ejemplo, $F(x, 0) = 2x$ con x tan grande como se quiera).

Solución del ejercicio 4

a. $G(0, 0) = 0$, $G(6, 0) = 6$, $G(4, 2) = 8$, $G(0, 4) = 8$.

b. En $(4, 2)$ y en $(0, 4)$, con valor 8.

c. Las rectas de nivel $x + 2y = k$ son paralelas al lado $x + 2y = 8$, que une los dos vértices. Todos los puntos de ese segmento son óptimos; por ejemplo, el punto medio $(2, 3)$: $G(2, 3) = 2 + 6 = 8$.

Solución del ejercicio 5

a. La región es vacía: no puede ser a la vez $x + y \leq 2$ y $x + y \geq 5$. No hay solución.

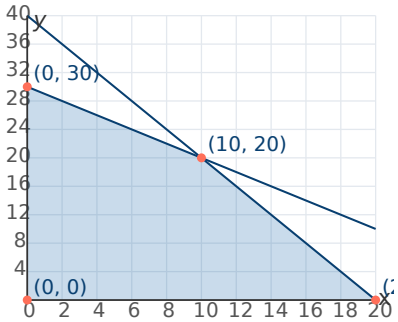
b. La región no está acotada hacia arriba (por ejemplo, $(0, y)$ cumple para todo $y \geq 0$) y F crece sin límite: no hay máximo.

c. El mínimo existe: $F \geq 0$ en la región y $F(0, 0) = 0$. El mínimo es 0, en el origen.

Solución del ejercicio 6

a. $2x + y \leq 40$, $x + y \leq 30$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. $F(x, y) = 50x + 30y$.

b. Vértices: $(0, 0)$, $(20, 0)$, $(0, 30)$ y el corte de $2x + y = 40$ con $x + y = 30$: $x = 10$, $y = 20$.



c. $F(0, 0) = 0$, $F(20, 0) = 1\,000$, $F(10, 20) = 1\,100$, $F(0, 30) = 900$. Máximo: 10 mesas y 20 sillas, con 1 100 €.

d. No sobra nada: taller $2 \cdot 10 + 20 = 40$ h y barnizado $10 + 20 = 30$ h. Las dos restricciones se agotan.

Solución del ejercicio 7

a. x: kilos de A; y: kilos de B. $2x + y \geq 8$, $x + 3y \geq 9$, $x, y \geq 0$. Minimizar $C = 4x + 3y$.

b. $(0,8)$, $(9,0)$ y el corte de $2x+y=8$ con $x+3y=9$: de la primera, $y=8-2x$; sustituyendo, $x+24-6x=9$, $x=3$, $y=2$.
c. $C(0,8)=24$, $C(3,2)=18$, $C(9,0)=36$. Lo más barato son 3 kg de A y 2 kg de B: 18 € al día.
d. Sí: proteína $2\cdot 3+2=8$ y vitaminas $3+3\cdot 2=9$. Se cumplen justo los mínimos.

Solución del ejercicio 8

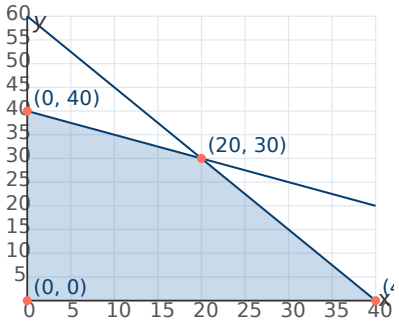
a. x: miles en A; y: miles en B. $x+y\leq 30$, $y\leq 18$, $y\leq 2x$, $x,y\geq 0$. Maximizar $R=0{,}05x+0{,}08y$.
b. $(0,0)$, $(30,0)$; $y=18$ con $x+y=30$ da $(12,18)$; $y=18$ con $y=2x$ da $(9,18)$.
c. $R(30,0)=1{,}5$, $R(12,18)=0{,}6+1{,}44=2{,}04$, $R(9,18)=0{,}45+1{,}44=1{,}89$, $R(0,0)=0$. Debe invertir 12 000 € en A y 18 000 € en B y gana 2 040 €.
d. $x+y=30$ (invierte todo) e $y=18$ (el máximo en B). La condición $y\leq 2x$ no se agota: 18.

Solución del ejercicio 9

a. x: grandes; y: pequeñas. $20x+10y\geq 120$ (es decir, $2x+y\geq 12$), $x+y\leq 8$, $x\leq 5$, $x,y\geq 0$. Minimizar $C=80x+50y$.
b. $2x+y=12$ con $x+y=8$: $x=4$, $y=4$. $2x+y=12$ con $x=5$: $y=2$. $x=5$ con $x+y=8$: $y=3$. Vértices: $(4,4)$, $(5,2)$ y $(5,3)$.
c. $C(4,4)=520$, $C(5,2)=500$, $C(5,3)=550$. Debe usar 5 grandes y 2 pequeñas: 500 €.
d. $5\cdot 20+2\cdot 10=120$ cajas, justo las necesarias.

Solución del ejercicio 10

a. x: lotes A; y: lotes B. $3x+2y\leq 120$, $x+2y\leq 80$, $x,y\geq 0$. Maximizar $F=5x+6y$.
b. Vértices: $(0,0)$, $(40,0)$, $(0,40)$ y el corte de las dos rectas: restando, $2x=40$, $x=20$, $y=30$.



c. $F(40,0)=200$, $F(20,30)=280$, $F(0,40)=240$. Óptimo: 20 lotes A y 30 lotes B, con 280 €.
d. Con $F=5x+3y$: $F(40,0)=200$, $F(20,30)=190$, $F(0,40)=120$. Sí cambia:

convendría hacer solo 40 lotes A.

Solución del ejercicio 11

a. x: autobuses grandes; y: pequeños. $50x + 30y \geq 400$ (es decir, $5x + 3y \geq 40$), $x + y \leq 10$, $x \leq 8$, $x, y \geq 0$. Minimizar $C = 600x + 400y$.
b. $5x + 3y = 40$ con $x + y = 10$: $5x + 30 - 3x = 40$, $x = 5$, $y = 5$. $5x + 3y = 40$ con $y = 0$: $x = 8$. $x = 8$ con $x + y = 10$: $y = 2$. Vértices: $(5, 5)$, $(8, 0)$ y $(8, 2)$.
c. $C(5, 5) = 5\,000$, $C(8, 0) = 4\,800$, $C(8, 2) = 5\,600$. Lo más barato: 8 autobuses grandes, 4 800 €.
d. $\dfrac{4\,800}{400} = 12$ € por alumno. No sobran plazas: $8 \cdot 50 = 400$.

Solución del ejercicio 12

a. Tierra: $x + y \leq 10$. Agua: $4\,000x + 2\,000y \leq 32\,000$, es decir, $2x + y \leq 16$. Jornales: $30x + 60y \leq 480$, es decir, $x + 2y \leq 16$. Y $x, y \geq 0$.
b. $(0, 0)$, $(8, 0)$, $(0, 8)$; $2x + y = 16$ con $x + y = 10$: $(6, 4)$; $x + 2y = 16$ con $x + y = 10$: $(4, 6)$.
c. En miles de euros, $F = 3x + 4y$: $F(8, 0) = 24$, $F(6, 4) = 34$, $F(4, 6) = 36$, $F(0, 8) = 32$. Óptimo: 4 ha de tomates y 6 ha de pimientos, con 36 000 €.
d. Agua usada: $4 \cdot 4\,000 + 6 \cdot 2\,000 = 28\,000$ m³; sobran 4 000 m³. La tierra y los jornales se agotan.

Solución del ejercicio 13

a. $3x + 2y \geq 24$ (en miles de personas), $x \geq 2$, $y \leq 10$, $y \geq 0$. Minimizar $C = 200x + 100y$.
b. $x = 2$ con $3x + 2y = 24$: $y = 9$. $x = 2$ con $y = 10$: $(2, 10)$. $3x + 2y = 24$ con $y = 0$: $(8, 0)$. Vértices: $(2, 9)$, $(2, 10)$, $(8, 0)$; la región no está acotada hacia la derecha.
c. $C(2, 9) = 1\,300$, $C(2, 10) = 1\,400$, $C(8, 0) = 1\,600$. La más barata: 2 anuncios de radio y 9 en redes, 1 300 €.
d. No: la región no está acotada (se pueden añadir anuncios de radio sin límite), así que el coste no tiene máximo.

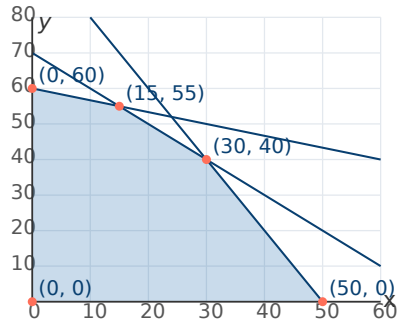
Solución del ejercicio 14

a. $x + y \leq 8$, $x - y \leq 2$, $y \leq 6$, $x, y \geq 0$. Vértices: $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(5, 3)$ (corte de $x + y = 8$ y $x - y = 2$), $(2, 6)$ (corte de $x + y = 8$ e $y = 6$) y $(0, 6)$.
b. $F(0, 0) = 0$, $F(2, 0) = 40$, $F(5, 3) = 190$, $F(2, 6) = 220$, $F(0, 6) = 180$. Máximo 220 € con 2 decenas de platea y 6 de anfiteatro.
c. $G(2, 0) = 2$, $G(5, 3) = 2$ y en los demás es menor: el máximo, 2, se alcanza en

todo el segmento que une $(2,0)$ y $(5,3)$, que es justo la condición «diferencia como mucho 2».

Solución del ejercicio 15

a. $2x+y\leq 100$ (almendra), $x+y\leq 70$ (miel), $x+3y\leq 180$ (horno), $x,y\geq 0$. Maximizar $F=4x+5y$.
b. $(0,0)$, $(50,0)$, $(0,60)$; $2x+y=100$ con $x+y=70$: $(30,40)$; $x+y=70$ con $x+3y=180$: $2y=110$, $(15,55)$.



c. $F(50,0)=200$, $F(30,40)=320$, $F(15,55)=335$, $F(0,60)=300$. Óptimo: 15 cajas de duro y 55 de blando, 335 €.
d. Con $F=8x+5y$: $F(50,0)=400$, $F(30,40)=440$, $F(15,55)=395$, $F(0,60)=300$. Nuevo óptimo: 30 cajas de duro y 40 de blando, 440 €.
e. Las rectas de nivel cambian de inclinación al cambiar los coeficientes de F. Al girar, la última recta que toca la región puede apoyarse en otro vértice.

Solución del ejercicio 16

a. x: sacos A; y: sacos B. Nitrógeno $3x+y\geq 12$; fósforo $x+y\geq 8$; potasio $x+3y\geq 12$; $x,y\geq 0$. Minimizar $C=10x+8y$.
b. $(0,12)$; $3x+y=12$ con $x+y=8$: $x=2$, $y=6$; $x+y=8$ con $x+3y=12$: $y=2$, $x=6$; $(12,0)$.
c. $C(0,12)=96$, $C(2,6)=68$, $C(6,2)=76$, $C(12,0)=120$. Mínimo: 2 sacos A y 6 sacos B, 68 €.
d. Nitrógeno $3\cdot 2+6=12$ (justo), fósforo $2+6=8$ (justo), potasio $2+18=20$: recibe 8 kg de potasio de más.
e. La región no está acotada: comprar más sacos siempre cumple las condiciones, y el coste crecería sin límite.

Solución del ejercicio 17

a. De B a T1: $50-x$; de B a T2: $50-y$.
b. $x,y\geq 0$; $x+y\leq 40$ (almacén A); $50-x\geq 0$ y $50-y\geq 0$; $(50-x)+(50-y)\leq 70$, es decir, $x+y\geq 30$ (almacén B).
c. $C=3x+5y+4(50-x)+2(50-y)=3x+5y+200-4x+100-2y=300-x+3y$

.

d. Vértices: $(30,0)$, $(40,0)$, $(0,40)$, $(0,30)$. $C = 270$, 260, 420 y 390. Mínimo 260 €: de A salen 40 cajas a T1; de B salen 10 a T1 y 50 a T2.
e. De B salen $10 + 50 = 60$ cajas, así que quedan $70 - 60 = 10$.

Solución del ejercicio 18

a. $x \leq 60$, $y \leq x$, $x + y \geq 50$, $x + y \leq 100$, $x, y \geq 0$.
b. $(50,0)$, $(60,0)$, $(60,40)$ (con $x + y = 100$), $(50,50)$ (corte de $y = x$ y $x + y = 100$) y $(25,25)$ (corte de $y = x$ y $x + y = 50$).
c. $F = 3x + 2y$: 150, 180, 260, 250 y 125. Máximo 260 € con 60 kg de natural y 40 de torrefacto; mínimo 125 € con 25 kg de cada.
d. $\dfrac{40}{100} = 40$ %.
e. Los puntos del segmento de $x + y = 100$ entre $(50,50)$ y $(60,40)$: entre 50 y 60 kg de natural y el resto de torrefacto.

Solución del ejercicio 19

a. x: dobles; y: triples. $2x + 3y \geq 41$, $x \leq 15$, $y \leq 10$, $x, y \geq 0$ enteros. Minimizar $C = 60x + 75y$.
b. $2x + 3y = 41$ con $y = 10$: $x = 5{,}5$; con $x = 15$: $y = \dfrac{11}{3}$; y $(15,10)$.
$C(5{,}5;\ 10) = 1\,080$, $C\left(15, \frac{11}{3}\right) = 1\,175$, $C(15,10) = 1\,650$. Mínimo continuo: 1 080 €.
c. No vale: no se puede reservar media habitación. Con 6 dobles y 10 triples hay 42 plazas y cuesta $360 + 750 = 1\,110$ €.
d. Con $y = 10$: $x \geq 5{,}5$, $x = 6$, 1 110 €. Con $y = 9$: $2x \geq 14$, $x = 7$, $420 + 675 = 1\,095$ €. Con $y = 8$: $2x \geq 17$, $x = 9$, $540 + 600 = 1\,140$ €. Con menos triples el coste sigue subiendo. La mejor: 7 dobles y 9 triples, 1 095 €, con 41 plazas exactas.
e. Redondear el vértice óptimo no siempre da la mejor solución entera: hay que comprobar los puntos enteros cercanos de la región.

Solución del ejercicio 20

a. Rectas de nivel: $y = -\dfrac{p}{30}x + \dfrac{k}{30}$, pendiente $-\dfrac{p}{30}$. Lado $2x + y = 40$: pendiente -2; lado $x + y = 30$: pendiente -1.
b. El vértice $(10,20)$ es óptimo cuando la pendiente de las rectas de nivel está entre las de los dos lados: $-2 \leq -\dfrac{p}{30} \leq -1$, es decir, $30 \leq p \leq 60$.
c. $p = 70$: $F(20,0) = 1\,400$, $F(10,20) = 1\,300$, $F(0,30) = 900$; conviene fabricar 20 mesas. $p = 20$: $F(20,0) = 400$, $F(10,20) = 800$, $F(0,30) = 900$; conviene fabricar 30 sillas.

d. Con $p = 30$, $F = 30(x + y)$ vale 900 en $(10, 20)$ y en $(0, 30)$: hay infinitas soluciones, todos los puntos del lado $x + y = 30$ entre esos dos vértices.