Apuntes - Probabilidad

Curso: 2 Bachillerato Ccss

La probabilidad mide la incertidumbre. En este tema usarás la regla de Laplace, las probabilidades de la unión y la condicionada, el teorema de la probabilidad total y el teorema de Bayes con diagramas de árbol y tablas de contingencia.

Actividad de introducción: ¿llueve o no llueve?

La aplicación del tiempo anuncia para mañana en Santiago de Compostela una probabilidad de lluvia del 70 %. Lucía tiene que decidir si lleva paraguas, y además sabe que, cuando llueve, el autobús llega tarde la mitad de las veces, mientras que cuando no llueve solo se retrasa uno de cada diez días. ¿Qué probabilidad hay de que mañana llegue tarde a clase? Y si al final llega tarde, ¿qué probabilidad hay de que haya llovido? Para responder hay que combinar probabilidades que dependen unas de otras. En este tema aprenderás a hacerlo con orden: con la regla de Laplace, la probabilidad condicionada, las tablas de contingencia, los diagramas de árbol y los teoremas de la probabilidad total y de Bayes, que aparecen cada año en la prueba de acceso a la universidad.

Sucesos y regla de Laplace

Definición: suceso y probabilidad

Un **experimento aleatorio** tiene varios resultados posibles. El conjunto de todos ellos es el **espacio muestral** E. Un **suceso** es un subconjunto de E. La **probabilidad** $P(A)$ es un número entre 0 y 1 que mide lo probable que es A.

Regla: Laplace

Si los resultados son equiprobables, $P(A) = \dfrac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$.

Propiedad: propiedades

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$; $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Si A y B son **incompatibles** ($A \cap B = \varnothing$), $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Ejemplo 1

Al lanzar dos dados, ¿cuál es la probabilidad de que la suma sea 7?

Hay 36 resultados equiprobables. Suman 7: $(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)$, es decir, 6. $P = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.

Ejemplo 2

Si $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}4$ y $P(A \cap B) = 0{,}2$, halla $P(A \cup B)$.

$P(A \cup B) = 0{,}5 + 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}7$.

Probabilidad condicionada e independencia

Definición: probabilidad condicionada

La probabilidad de A sabiendo que ha ocurrido B es $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, con $P(B) > 0$. De aquí, $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B)$.

Definición: sucesos independientes

A y B son **independientes** si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, equivalente a $P(A \mid B) = P(A)$. Que ocurra uno no cambia la probabilidad del otro.

Ejemplo 3

En un grupo de 200 personas, 100 son hombres y 100 mujeres. Usan el autobús 40 hombres y 70 mujeres. Se elige una persona. Calcula la probabilidad de que use autobús si es mujer.

Tabla:

	Autobús	Coche	Total
Hombres	40	60	100
Mujeres	70	30	100
Total	110	90	200

$P(\text{bus} \mid \text{mujer}) = \dfrac{70}{100} = 0{,}7$. Como $P(\text{bus}) = \dfrac{110}{200} = 0{,}55 \neq 0{,}7$, no son independientes.

¡Atención!

Incompatibles no significa independientes. Si A y B son incompatibles con probabilidad no nula, $P(A \cap B) = 0 \neq P(A)P(B)$: son dependientes. Y recuerda que $P(A \mid B) \neq P(B \mid A)$ en general.

Probabilidad total y teorema de Bayes

Definición: sistema completo de sucesos

Los sucesos $A_1, \ldots, A_n$ forman un **sistema completo** si son incompatibles dos a dos

y su unión es todo el espacio muestral (suman probabilidad 1).

Teorema: probabilidad total

Si $A_1, \ldots, A_n$ es un sistema completo, $P(B) = \sum_i P(A_i)\, P(B \mid A_i)$.

Teorema: Bayes

$P(A_j \mid B) = \dfrac{P(A_j)\, P(B \mid A_j)}{P(B)}$. Permite hallar la probabilidad de una causa conocido su efecto.

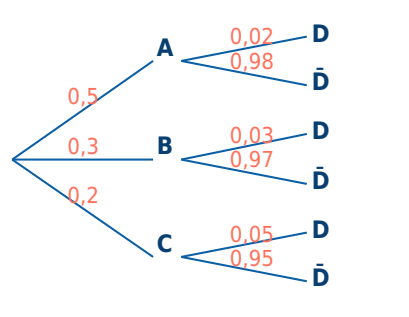
Método: problemas con diagrama de árbol

1. Identifica el primer nivel (causas) y escribe sus probabilidades.
2. Para cada causa, escribe las probabilidades condicionadas del efecto.
3. Cada camino completo se multiplica: $P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B|A_i)$.
4. Probabilidad total: suma los caminos que acaban en B.
5. Bayes: divide el camino buscado entre la probabilidad total.

Ejemplo 4

Una fábrica tiene tres máquinas: A produce el 50 % de las piezas, B el 30 % y C el 20 %. Son defectuosas el 2 %, 3 % y 5 % de las piezas de A, B y C. Halla la probabilidad de que una pieza sea defectuosa y, si lo es, de que venga de A.

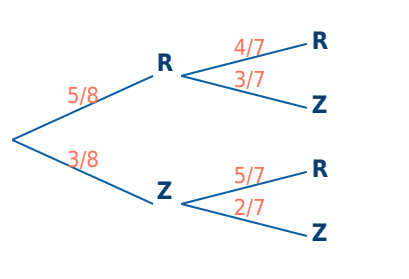
$P(D) = 0{,}5 \cdot 0{,}02 + 0{,}3 \cdot 0{,}03 + 0{,}2 \cdot 0{,}05 = 0{,}01 + 0{,}009 + 0{,}01 = 0{,}029$. Por Bayes: $P(A \mid D) = \dfrac{0{,}01}{0{,}029} = \dfrac{10}{29} \approx 0{,}345$.



Ejemplo 5

Una bolsa tiene 5 bolas rojas y 3 azules. Se extraen dos sin reposición. Halla la probabilidad de que las dos sean rojas.

$P(R_1) = \frac{5}{8}$ y $P(R_2|R_1) = \frac{4}{7}$. $P(R_1 \cap R_2) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$.



Ejemplo 6

Una enfermedad afecta al 2 % de la población. Una prueba da positivo en el 95 % de los enfermos y en el 4 % de los sanos. Si una persona da positivo, ¿qué probabilidad hay de que esté enferma?

$P(+) = 0{,}02 \cdot 0{,}95 + 0{,}98 \cdot 0{,}04 = 0{,}019 + 0{,}0392 = 0{,}0582$.

$P(\text{enf}\,|\,+) = \frac{0{,}019}{0{,}0582} \approx 0{,}326$. Aunque la prueba sea fiable, solo el 32,6 % de los positivos están enfermos, porque la enfermedad es poco frecuente.

Ejemplo 7

Se sabe que $P(A) = 0{,}6$, $P(B|A) = 0{,}5$ y $P(B|\bar{A}) = 0{,}2$. Calcula $P(B)$.

A y $\bar{A}$ forman un sistema completo: $P(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 + 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}3 + 0{,}08 = 0{,}38$.

Además, $P(A|B) = \frac{0{,}3}{0{,}38} = \frac{15}{19} \approx 0{,}789$.

Observación

Con un suceso del tipo «al menos uno» conviene usar el complementario: $P(\text{al menos uno}) = 1 - P(\text{ninguno})$. Por ejemplo, la probabilidad de al menos una cara en tres lanzamientos es $1 - (1/2)^3 = 7/8$. En la PAU de Ciencias Sociales aparecen casi siempre un árbol o una tabla de contingencia con probabilidad condicionada, total y Bayes.

Tablas de contingencia y diagramas de árbol

Observación: elegir la herramienta adecuada

Cuando el enunciado da números absolutos de personas clasificadas según dos características (sexo y deporte, edad y opinión), lo más cómodo es una tabla de contingencia: las probabilidades se leen dividiendo una casilla entre el total, y las condicionadas dividiendo entre el total de una fila o de una columna. Cuando el

enunciado describe un proceso en etapas (primero se elige una fábrica y después la pieza resulta defectuosa o no), lo natural es un diagrama de árbol: se multiplican las probabilidades a lo largo de cada rama y se suman las ramas que conducen al suceso que interesa. Las dos herramientas son equivalentes, y en muchos problemas conviene pasar de una a otra para comprobar los resultados.

Ejemplo 8

Resuelve la actividad de introducción: llueve con probabilidad $0{,}7$; si llueve, el autobús llega tarde con probabilidad $0{,}5$, y si no llueve, con probabilidad $0{,}1$. Calcula la probabilidad de llegar tarde y, si Lucía llega tarde, la probabilidad de que haya llovido.

Por la probabilidad total, $P(T) = 0{,}7 \cdot 0{,}5 + 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}35 + 0{,}03 = 0{,}38$. Por el teorema de Bayes, $P(L|T) = \dfrac{0{,}35}{0{,}38} \approx 0{,}921$. Si Lucía llega tarde, es casi seguro que ha llovido.

Método: resolver un problema de Bayes paso a paso

1. Identifica el sistema completo de sucesos (las «causas»: fábricas, turnos, grupos de edad) y comprueba que sus probabilidades suman 1.
2. Anota las probabilidades condicionadas del efecto dado cada causa.
3. Dibuja el árbol y multiplica a lo largo de cada rama.
4. Suma las ramas del efecto para obtener su probabilidad total.
5. Divide la rama de la causa que te preguntan entre esa probabilidad total.
6. Comprueba que las probabilidades a posteriori de todas las causas suman 1.

Ejemplo 9

En una tabla de 200 clientes de un gimnasio, 80 son menores de 30 años y de ellos 60 van por la mañana; de los 120 restantes, 30 van por la mañana. ¿Son independientes la edad y el horario?

$P(\text{mañana}) = \dfrac{60+30}{200} = 0{,}45$ y $P(\text{mañana}|\text{menor de 30}) = \dfrac{60}{80} = 0{,}75$. Como $0{,}75 \neq 0{,}45$, no son independientes: los jóvenes prefieren claramente la mañana.

Propiedad: el producto de probabilidades

Despejando la definición de probabilidad condicionada se obtiene la regla del producto: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$. Es exactamente lo que se hace al multiplicar a lo largo de una rama del árbol. Con tres etapas, $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$. Si los sucesos son independientes, cada probabilidad condicionada coincide con la probabilidad sin condicionar y la regla se reduce a multiplicar las probabilidades de cada suceso, como al lanzar varias veces una moneda o al encadenar sensores que funcionan por separado. En cambio, si el

resultado de una etapa modifica las condiciones de la siguiente, como ocurre al sacar bolas o cartas sin devolverlas, hay que recalcular en cada paso cuántos casos favorables y cuántos casos posibles quedan.

Ejemplo 10

Se sacan tres cartas sin reemplazamiento de una baraja española de 40 cartas. ¿Qué probabilidad hay de que las tres sean de copas?

Aplicamos la regla del producto en tres etapas: $\frac{10}{40}\cdot\frac{9}{39}\cdot\frac{8}{38}=\frac{720}{59\,280}=\frac{3}{247}\approx 0{,}0121$. En cada etapa queda una carta de copas menos y una carta menos en total.

¡Atención!

No confundas $P(A|B)$ con $P(B|A)$: la probabilidad de dar positivo si se está enfermo no es la probabilidad de estar enfermo si se da positivo. Tampoco confundas sucesos incompatibles ($A\cap B=\varnothing$) con sucesos independientes ($P(A\cap B)=P(A)P(B)$): dos sucesos incompatibles con probabilidad positiva nunca son independientes. Y en las extracciones sin reemplazamiento recuerda cambiar el número de bolas en la segunda etapa.

¿Sabías que?

La teoría de la probabilidad nació en 1654 con unas cartas entre Blaise Pascal y Pierre de Fermat sobre cómo repartir el dinero de una partida de dados interrumpida. Un siglo después, en 1763, se publicó póstumamente el trabajo del reverendo Thomas Bayes sobre cómo actualizar una probabilidad con nueva información. Hoy el teorema de Bayes se usa en los filtros de correo no deseado, en el diagnóstico médico, en los sistemas de recomendación de las plataformas de música y vídeo y en la inteligencia artificial.

El consejo de Otto

Dibuja siempre el árbol y escribe las probabilidades en cada rama. Comprueba que las ramas que salen de un mismo nodo suman 1. En un Bayes, el numerador es un camino del árbol y el denominador es la suma de los caminos que acaban en el suceso observado.