Soluciones - Probabilidad

Curso: 2 Bachillerato Ccss

Solución del ejercicio 1

a. El espacio muestral reúne todos los resultados posibles: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Los sucesos son $A = \{2, 4, 6\}$ y $B = \{5, 6\}$.

b. La unión contiene los resultados de A o de B: $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$, y por Laplace $P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. La intersección contiene los comunes: $A \cap B = \{6\}$, con $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$. Comprobación con la fórmula de la unión: $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$.

c. El contrario de «par» es «impar»: $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$, y $P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

d. $A \cap \bar{B} = \{2, 4\}$: salir par y no mayor que 4. Su probabilidad es $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Solución del ejercicio 2

a. Fórmula de la unión:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}5 + 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}7$. Restamos la intersección porque se ha contado dos veces.

b. Por De Morgan, «ni A ni B» es el contrario de la unión: , luego $P = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.

c. Que ocurra A pero no B es A sin la parte común:
$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}3$.

d. Por la otra ley de De Morgan, : «no ocurren los dos a la vez». Por tanto, $P = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

Solución del ejercicio 3

a. Por la definición de probabilidad condicionada: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}2}{0{,}4} = 0{,}5$.

b. Del mismo modo, condicionando a A: $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}2}{0{,}5} = 0{,}4$. En general $P(A|B) \neq P(B|A)$.

c. Sí son independientes. Primera forma: $P(A) \cdot P(B) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}2 = P(A \cap B)$. Segunda forma: $P(A|B) = 0{,}5 = P(A)$, es decir, saber que ocurre B no cambia la probabilidad de A (y también $P(B|A) = P(B)$).

Solución del ejercicio 4

a. En el árbol, la primera rama «roja» tiene probabilidad $\frac{5}{8}$. Como no se devuelve, quedan 4 rojas de 7 bolas, y la segunda rama «roja» vale $\frac{4}{7}$. Multiplicando: $P(RR) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$.

b. Del mismo modo, $P(AA) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56}$. Los dos caminos son incompatibles, así que sumamos: $P(\text{mismo color}) = \frac{20}{56} + \frac{6}{56} = \frac{26}{56} = \frac{13}{28}$.

c. «Al menos una azul» es el contrario de «dos rojas»: $1 - \frac{5}{14} = \frac{9}{14}$.

d. Con reemplazamiento la urna no cambia y las extracciones son independientes: $P(RR) = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{25}{64} \approx 0{,}39$, algo más que sin reemplazamiento ($\approx 0{,}36$).

Solución del ejercicio 5

a. Si los sucesos son independientes, la probabilidad de que ocurran ambos es el producto: $P(A \cap B) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18$.

b. Fórmula de la unión: $P(A \cup B) = 0{,}3 + 0{,}6 - 0{,}18 = 0{,}72$.

c. Primera manera: «ninguno» es el contrario de la unión, $1 - 0{,}72 = 0{,}28$. Segunda manera: los contrarios de sucesos independientes también son independientes, así que $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}28$. Coinciden.

d. «Exactamente uno» es la unión menos la intersección: $0{,}72 - 0{,}18 = 0{,}54$. También $0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}12 + 0{,}42 = 0{,}54$.

Solución del ejercicio 6

a. Primer nivel: aprueba el primero (0,7) o suspende (0,3). Segundo nivel: tras aprobar, aprueba el segundo con 0,8 y suspende con 0,2; tras suspender, aprueba con 0,5 y suspende con 0,5.

b. Multiplicamos las probabilidades del camino «aprueba y aprueba»: $0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56$.

c. Por el teorema de la probabilidad total sumamos los dos caminos que acaban en «aprueba el segundo»: $0{,}7 \cdot 0{,}8 + 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}56 + 0{,}15 = 0{,}71$.

d. Por el teorema de Bayes: $P(\text{aprobó el 1.º} \mid \text{aprobó el 2.º}) = \frac{0{,}56}{0{,}71} = \frac{56}{71} \approx 0{,}7887$.

Saber que aprobó el segundo aumenta la probabilidad de haber aprobado el primero (de 0,7 a 0,79).

Solución del ejercicio 7

a. Sumamos por filas y columnas: chicas $120 + 80 = 200$; chicos $150 + 50 = 200$; practican deporte $120 + 150 = 270$; no practican $80 + 50 = 130$; total 400.

b. Por Laplace: $P(D) = \dfrac{270}{400} = 0{,}675$.

c. Es la casilla común: $P(C \cap D) = \dfrac{120}{400} = 0{,}3$.

d. Al condicionar, el total pasa a ser la fila o la columna conocida: $P(D|C) = \dfrac{120}{200} = 0{,}6$ y $P(C|D) = \dfrac{120}{270} = \dfrac{4}{9} \approx 0{,}4444$.

e. No son independientes: $P(C) \cdot P(D) = 0{,}5 \cdot 0{,}675 = 0{,}3375 \neq 0{,}3$. También $P(D|C) = 0{,}6 \neq 0{,}675 = P(D)$: las chicas practican algo menos de deporte que el conjunto.

Solución del ejercicio 8

a. Primer nivel, forma de pago: tarjeta 0,6, efectivo 0,3 y móvil 0,1. Segundo nivel, «más de 50 €» (G): 0,4 tras tarjeta, 0,1 tras efectivo y 0,2 tras móvil; el resto de cada rama es «50 € o menos».

b. Teorema de la probabilidad total: $P(G) = 0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}24 + 0{,}03 + 0{,}02 = 0{,}29$. El 29 % de las compras supera los 50 €.

c. Teorema de Bayes: $P(T|G) = \dfrac{0{,}24}{0{,}29} = \dfrac{24}{29} \approx 0{,}8276$. La gran mayoría de las compras grandes se paga con tarjeta.

d. $P(M|G) = \dfrac{0{,}02}{0{,}29} = \dfrac{2}{29} \approx 0{,}069$.

Solución del ejercicio 9

a. $P(+) = 0{,}02 \cdot 0{,}95 + 0{,}98 \cdot 0{,}04 = 0{,}019 + 0{,}0392 = 0{,}0582$.

b. $P(E|+) = \dfrac{0{,}019}{0{,}0582} \approx 0{,}3265$.

c. $P(-) = 1 - 0{,}0582 = 0{,}9418$ y $P(S|-) = \dfrac{0{,}98 \cdot 0{,}96}{0{,}9418} = \dfrac{0{,}9408}{0{,}9418} \approx 0{,}9989$.

d. Solo un 32,65 % de los positivos está realmente enfermo, porque la enfermedad es rara y los falsos positivos de las muchas personas sanas superan a los verdaderos positivos. Por eso un positivo se confirma con una segunda prueba.

Solución del ejercicio 10

a. $P(D) = 0{,}5 \cdot 0{,}01 + 0{,}3 \cdot 0{,}02 + 0{,}2 \cdot 0{,}03 = 0{,}005 + 0{,}006 + 0{,}006 = 0{,}017$.

b. $P(A|D) = \dfrac{0{,}005}{0{,}017} = \dfrac{5}{17} \approx 0{,}294$; $P(B|D) = \dfrac{0{,}006}{0{,}017} = \dfrac{6}{17} \approx 0{,}353$; $P(C|D) = \dfrac{6}{17} \approx 0{,}353$. Suman 1.

c. B y C empatan con $\dfrac{6}{17}$. Aunque A fabrica la mitad de los móviles, tiene la menor tasa de defectos; C fabrica poco pero con muchos defectos.

Solución del ejercicio 11

a. Teorema de la probabilidad total, sumando las tres ramas que acaban en «tarde»:
$P(T) = 0{,}4 \cdot 0{,}15 + 0{,}35 \cdot 0{,}05 + 0{,}25 \cdot 0{,}1 = 0{,}06 + 0{,}0175 + 0{,}025 = 0{,}1025$. Llega tarde algo más del 10 % de los alumnos.

b. Teorema de Bayes: $P(\text{bus}|T) = \dfrac{0{,}06}{0{,}1025} \approx 0{,}5854$. Más de la mitad de los que llegan tarde vienen en autobús.

c. Primero, $P(\bar{T}) = 1 - 0{,}1025 = 0{,}8975$. Los que vienen en bicicleta y llegan puntuales son $0{,}35 \cdot 0{,}95 = 0{,}3325$. Por Bayes, $P(\text{bici}|\bar{T}) = \dfrac{0{,}3325}{0{,}8975} \approx 0{,}3705$.

Solución del ejercicio 12

a. $P(O) = \dfrac{10}{40} = \dfrac{1}{4}$ y $P(F) = \dfrac{12}{40} = \dfrac{3}{10}$ (3 figuras por palo).

b. $P(O \cap F) = \dfrac{3}{40}$ y $P(O \cup F) = \dfrac{10 + 12 - 3}{40} = \dfrac{19}{40}$.

c. $P(O|F) = \dfrac{3/40}{12/40} = \dfrac{1}{4}$.

d. Sí: $P(O) \cdot P(F) = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{3}{10} = \dfrac{3}{40} = P(O \cap F)$. Saber que la carta es figura no cambia la probabilidad de que sea de oros, porque todos los palos tienen las mismas figuras.

Solución del ejercicio 13

a. «Al menos un tipo» es la unión: $P(D \cup P) = 0{,}55 + 0{,}30 - 0{,}15 = 0{,}70$, el 70 %.

b. No leer ninguna es el contrario de la unión: $1 - 0{,}70 = 0{,}30$, el 30 %.

c. Solo digital es digital sin la parte común: $P(D \cap \bar{P}) = 0{,}55 - 0{,}15 = 0{,}40$, el 40 %.

d. Es una probabilidad condicionada: $P(P|D) = \dfrac{P(D \cap P)}{P(D)} = \dfrac{0{,}15}{0{,}55} = \dfrac{3}{11} \approx 0{,}2727$.

e. No son independientes, porque $P(D)P(P) = 0{,}55 \cdot 0{,}30 = 0{,}165 \neq 0{,}15$. Quien lee prensa digital lee algo menos en papel $(0{,}27)$.

Solución del ejercicio 14

a. Los lanzamientos son independientes, así que multiplicamos: $P(\text{tres goles}) = 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}512$.
b. La probabilidad de fallar un penalti es $1 - 0{,}8 = 0{,}2$: $P(\text{ninguno}) = 0{,}2^3 = 0{,}008$.
c. Exactamente dos goles significa fallar uno; el fallo puede estar en el 1.º, el 2.º o el 3.º lanzamiento, y cada orden tiene probabilidad $0{,}8^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}128$. En total, $3 \cdot 0{,}128 = 0{,}384$.
d. «Al menos uno» es el contrario de «ninguno»: $1 - 0{,}008 = 0{,}992$.

Solución del ejercicio 15

a. Teletrabajan: 20, 108 y 42 (total 170). No teletrabajan: 180, 72 y 78 (total 330). Totales por departamento: 200, 180 y 120; total 500.
b. $P(T) = \dfrac{170}{500} = 0{,}34$.
c. $P(A|T) = \dfrac{108}{170} = \dfrac{54}{85} \approx 0{,}6353$.
d. $P(T|C) = \dfrac{42}{120} = 0{,}35$, muy parecida a $0{,}34$: en Comercial se teletrabaja casi igual que en el conjunto de la empresa.
e. No: $P(T|\text{Prod}) = \dfrac{20}{200} = 0{,}1 \neq 0{,}34$. Administración, con $P(T|A) = \dfrac{108}{180} = 0{,}6$, es el departamento que más teletrabaja y donde más se notarían las mejoras digitales.

Solución del ejercicio 16

a. $P(M) = 0{,}3 \cdot 0{,}95 + 0{,}7 \cdot 0{,}02 = 0{,}285 + 0{,}014 = 0{,}299$.
b. $P(S|M) = \dfrac{0{,}285}{0{,}299} \approx 0{,}9532$.
c. $P(\bar{M}) = 0{,}701$ y $P(L|\bar{M}) = \dfrac{0{,}7 \cdot 0{,}98}{0{,}701} = \dfrac{0{,}686}{0{,}701} \approx 0{,}9786$.
d. Error: spam no marcado o legítimo marcado: $0{,}3 \cdot 0{,}05 + 0{,}7 \cdot 0{,}02 = 0{,}015 + 0{,}014 = 0{,}029$.
e. Sí: acierta en el 97,1 % de los correos y más del 95 % de lo marcado es spam. Aun así, el 4,7 % de los correos marcados es legítimo, por lo que conviene revisar de vez en cuando la carpeta de spam.

Solución del ejercicio 17

a. Urna I: $\dfrac{1}{3}$; urna II: $\dfrac{2}{3}$. En I: blanca $\dfrac{3}{5}$, negra $\dfrac{2}{5}$. En II: blanca $\dfrac{1}{5}$, negra $\dfrac{4}{5}$.

b. $P(B) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{2}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

c. $P(I|B) = \frac{1/5}{1/3} = \frac{3}{5}$.

d. Solo es posible en la urna I: $\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{1}{10}$; en la urna II hay una sola blanca.

e. Ahora $P(I) = P(II) = \frac{1}{2}$: $P(B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ y $P(I|B) = \frac{3/10}{2/5} = \frac{3}{4}$. Sube de $0{,}6$ a $0{,}75$.

Solución del ejercicio 18

a. $P(I) = 0{,}30\cdot 0{,}80 + 0{,}45\cdot 0{,}60 + 0{,}25\cdot 0{,}20 = 0{,}24 + 0{,}27 + 0{,}05 = 0{,}56$.

b. $P(\text{más de 60}|I) = \frac{0{,}05}{0{,}56} \approx 0{,}0893$.

c. $P(\bar{I}) = 0{,}44$; $P(\text{18-35}|\bar{I}) = \frac{0{,}30\cdot 0{,}20}{0{,}44} = \frac{0{,}06}{0{,}44} \approx 0{,}1364$.

d. $\frac{0{,}27}{0{,}56} \approx 0{,}4821$: el 48,2 %.

e. Casi la mitad de sus clientes en línea tendría entre 36 y 60 años y solo un 8,9 % más de 60. Si quiere llegar a las personas mayores, debería mantener también la venta en tienda o por teléfono.

Solución del ejercicio 19

a. Tienen que funcionar los dos: $0{,}9\cdot 0{,}9 = 0{,}81$.

b. Solo falla si fallan los dos: $1 - 0{,}1^2 = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$.

c. $1 - 0{,}1^3 = 0{,}999$.

d. $1 - 0{,}1^n \geq 0{,}9999$ equivale a $0{,}1^n \leq 0{,}0001 = 0{,}1^4$, luego $n \geq 4$ sensores.

e. Porque, si los fallos son independientes, la probabilidad de que fallen todos a la vez es el producto de probabilidades pequeñas, y se hace muy pequeña.

Solución del ejercicio 20

a. «Al menos dos coinciden» incluye muchos casos (dos, tres, varias parejas...). El contrario, «todos distintos», es un único caso que se calcula con un producto.

b. $P(\text{distintos}) = \frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\frac{362}{365}\cdot\frac{361}{365} \approx 0{,}9729$, así que $P(\text{coinciden}) \approx 0{,}0271$.

c. $P_n = 1 - \frac{365\cdot 364\cdots(365-n+1)}{365^n}$.

d. $P_{23} \approx 0{,}5073$, que ya supera $0{,}5$ (con 22 alumnos es $0{,}4757$). Con 25 alumnos, $P_{25} \approx 0{,}5687$.

e. Pensamos en coincidir con nuestro propio cumpleaños, pero lo que cuenta son todas las parejas: con 23 personas hay $\frac{23 \cdot 22}{2} = 253$ parejas posibles.