Soluciones del examen - Muestreo e intervalos de confianza

Curso: 2 Bachillerato Ccss · Duración: 90 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (4 puntos)

a. Como la población es normal, la media muestral también lo es, con la misma media y desviación $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$: $\bar{X} \sim N\left(6{,}5;\ \frac{1{,}6}{\sqrt{16}}\right) = N(6{,}5;\ 0{,}4)$. (1 punto)

b. Tipificamos con la desviación de $\bar{X}$: $z = \frac{6{,}8 - 6{,}5}{0{,}4} = 0{,}75$.
$P(\bar{X} > 6{,}8) = 1 - \Phi(0{,}75) = 1 - 0{,}7734 = 0{,}2266$. (1,5 puntos)

c. Los extremos están a $0{,}4$ kg de la media, es decir, $z = \pm 1$: $P(-1$. En el 68 % de las muestras el peso medio estará entre 6,1 y 6,9 kg. (1,5 puntos)

Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

a. Al 95 %, $z_{\alpha/2} = 1{,}96$ y $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{12}{\sqrt{144}} = 1$. El error máximo es $E = 1{,}96 \cdot 1 = 1{,}96$ litros y el intervalo, $(56 - 1{,}96;\ 56 + 1{,}96) = (54{,}04;\ 57{,}96)$ litros. (1,5 puntos)

b. Al 99 %, $z_{\alpha/2} = 2{,}575$ y $E = 2{,}575 \cdot 1 = 2{,}575$ litros. El intervalo es $(53{,}425;\ 58{,}575)$ litros. (1,5 puntos)

c. Para tener más seguridad de capturar la media real hay que ampliar el intervalo: con la misma muestra, el valor crítico pasa de 1,96 a 2,575 y el error crece en la misma proporción. (1 punto)

Solución del ejercicio 3 (4 puntos)

a. La proporción muestral es el número de respuestas favorables entre el tamaño de la muestra: $\hat{p} = \frac{390}{600} = 0{,}65$, y $\hat{q} = 0{,}35$. (0,5 puntos)

b. Al 95 %, $z_{\alpha/2} = 1{,}96$. El error máximo es $E = 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}65 \cdot 0{,}35}{600}} = 1{,}96 \cdot 0{,}01947 \approx 0{,}0382$. El intervalo es $(0{,}65 - 0{,}0382;\ 0{,}65 + 0{,}0382) = (0{,}6118;\ 0{,}6882)$, entre el 61,2 % y el 68,8 %. (2,5 puntos)

c. Sí: todo el intervalo está por encima de 0,60, ya que su extremo inferior es 0,6118. Con un 95 % de confianza, más del 60 % de los vecinos está a favor. (1 punto)

Solución del ejercicio 4 (3 puntos)

a. Despejando n de $E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ se obtiene $n \geq \left(\dfrac{z_{\alpha/2}\sigma}{E}\right)^2$. Al 99 %, $z_{\alpha/2} = 2{,}575$:
$n \geq \left(\dfrac{2{,}575 \cdot 25}{5}\right)^2 = 12{,}875^2 \approx 165{,}77$. Redondeando hacia arriba, hacen falta al menos 166 individuos. Siempre se redondea por exceso: con 165 individuos el error superaría ligeramente 5. (1,5 puntos)

b. Sin información previa se toma el caso más desfavorable, $\hat{p} = \hat{q} = 0{,}5$:
$n \geq \dfrac{1{,}96^2 \cdot 0{,}25}{0{,}04^2} = \dfrac{0{,}9604}{0{,}0016} = 600{,}25$. Hacen falta al menos 601 individuos. Con $n = 600$ el error sería algo mayor que 0,04; por eso se toma 601. (1,5 puntos)

Observa que exigir más confianza o un error menor obliga a tomar muestras más grandes.

Solución del ejercicio 5 (5 puntos)

a. $E = 1{,}645 \cdot \dfrac{30}{\sqrt{100}} = 1{,}645 \cdot 3 = 4{,}935$ euros. Intervalo: $(140{,}065;\ 149{,}935)$ euros. Se usa $z_{\alpha/2} = 1{,}645$, el valor que deja un 5 % en cada cola de la normal. (2 puntos)

b. No: 150 queda justo fuera del intervalo, por encima del extremo superior; al 90 % los datos indican un gasto medio menor. (1 punto)

c. $n \geq \left(\dfrac{1{,}645 \cdot 30}{3}\right)^2 = 16{,}45^2 = 270{,}6$: al menos 271 familias. (1,5 puntos)

d. Si se repitiera el estudio con muchas muestras de 100 familias, el 90 % de los intervalos así construidos contendría el gasto medio real. (0,5 puntos)