Ejercicios - Muestreo e intervalos de confianza

Curso: 2 Bachillerato Ccss · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Identificar el tipo de muestreo

El ayuntamiento de una ciudad quiere conocer la opinión de sus vecinos sobre el nuevo carril bici. Lee cada forma de elegir la muestra e indica qué tipo de muestreo se ha utilizado.

a. Se numeran los 48 000 vecinos del padrón y un programa elige al azar 400 números.
b. Se ordena el padrón alfabéticamente, se elige al azar uno de los 120 primeros y después uno de cada 120.
c. Se divide la ciudad en sus 6 distritos y se elige en cada uno un número de vecinos proporcional a su población.
d. Se eligen al azar 8 comunidades de vecinos y se pregunta a todas las personas que viven en ellas.

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Muestra estratificada en un instituto

Un instituto de Córdoba tiene los alumnos que indica la tabla. Se quiere elegir una muestra de 60 alumnos con afijación proporcional para una encuesta sobre el uso de la biblioteca.

Curso	1.º ESO	2.º ESO	3.º ESO	4.º ESO	Bachillerato
Alumnos	300	280	260	220	140

a. Calcula el número total de alumnos y la fracción de muestreo.
b. ¿Cuántos alumnos se eligen de cada curso?
c. Comprueba que la suma de la muestra es 60.
d. ¿Qué ventaja tiene este muestreo frente al aleatorio simple?

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Distribución de la media muestral

Una variable sigue en la población una distribución normal $N(50;\ 12)$. Se toman muestras aleatorias de 36 individuos y se calcula su media $\bar{X}$.

a. ¿Qué distribución sigue $\bar{X}$? Indica su media y su desviación típica.
b. Calcula $P(\bar{X} > 53)$.
c. Calcula $P(48$.
d. ¿Por qué la desviación típica de $\bar{X}$ es menor que la de la población?

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Distribución de la proporción muestral

En una comunidad autónoma, el 40 % de los hogares tiene mascota. Se eligen al azar muestras de 150 hogares y se calcula la proporción muestral $\hat{p}$ de hogares con mascota.

a. ¿Qué distribución sigue aproximadamente $\hat{p}$? Comprueba que se puede usar la aproximación normal.
b. Calcula $P(\hat{p} > 0{,}46)$.
c. Calcula $P(\hat{p}$.

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Valores críticos

Para construir intervalos de confianza se necesita el valor crítico $z_{\alpha/2}$, que deja entre $-z_{\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2}$ un área igual al nivel de confianza $1-\alpha$.

a. Explica por qué hay que buscar en la tabla la probabilidad $1 - \dfrac{\alpha}{2}$.
b. Halla $z_{\alpha/2}$ para el 90 % y para el 95 %.
c. Halla $z_{\alpha/2}$ para el 99 % y para el 98 %.

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Un primer intervalo para la media

El tiempo, en minutos, que tardan los empleados de una empresa en llegar al trabajo sigue una normal con desviación típica $\sigma = 4$ minutos. En una muestra de 64 empleados se obtiene una media de $24{,}5$ minutos.

a. Calcula el error máximo para un nivel de confianza del 95 %.
b. Escribe el intervalo de confianza.
c. Interpreta el resultado.

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – La espera en el centro de salud

Un centro de salud de Valencia estudia el tiempo que esperan los pacientes antes de entrar en consulta. Se sabe que el tiempo sigue una distribución normal con $\sigma = 6$

minutos. Se cronometra la espera de 100 pacientes elegidos al azar y la media resulta $18{,}3$ minutos.

a. Calcula el intervalo de confianza al 95 % para la espera media.
b. Calcula el intervalo de confianza al 99 %.
c. ¿Cuál de los dos intervalos es más ancho? Explica por qué.
d. La dirección afirma que la espera media es de 20 minutos. ¿Es compatible con los datos al 99 %?

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – El ocio de los jóvenes madrileños

Una consultora pregunta a 400 jóvenes de Madrid, elegidos al azar, si usan alguna aplicación para quedar con sus amigos los fines de semana. Contestan que sí 240.

a. Calcula la proporción muestral $\hat{p}$.
b. Calcula el error máximo al 95 %.
c. Escribe el intervalo de confianza al 95 % para la proporción de jóvenes que usan la aplicación.
d. ¿Se puede afirmar con esa confianza que la usan más de la mitad de los jóvenes?

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – Leer un intervalo ya construido

Un estudio publica que el número medio de horas semanales que los estudiantes de una universidad dedican al deporte está en el intervalo $(12{,}4;\ 13{,}6)$. Se sabe que la muestra fue de 81 estudiantes y que la desviación típica poblacional es $\sigma = 3$ horas.

a. ¿Cuál fue la media muestral?
b. ¿Cuál es el error máximo cometido?
c. Halla el valor crítico $z_{\alpha/2}$ utilizado.
d. ¿Con qué nivel de confianza se construyó el intervalo?

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – ¿Cuántas familias hay que encuestar?

Una asociación de consumidores quiere estimar el gasto medio semanal en fruta de las familias de Murcia. Por estudios anteriores se sabe que $\sigma = 15$ euros. Quiere que el error máximo no supere los 2 euros.

a. Escribe la fórmula del tamaño mínimo de la muestra.
b. Calcula el tamaño mínimo con una confianza del 95 %.
c. Calcula el tamaño mínimo con una confianza del 99 %.
d. ¿Por qué se redondea siempre hacia arriba?

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – El tamaño de una encuesta electoral

Un periódico quiere estimar la proporción de votantes de un partido con un error máximo del 3 % y una confianza del 95 %.

a. Si no se tiene ninguna información previa, ¿qué valor de $\hat{p}$ se toma y por qué?
b. Calcula el tamaño mínimo de la muestra en ese caso.
c. Una encuesta piloto indica que $\hat{p} \approx 0{,}2$. ¿Cuál es ahora el tamaño mínimo?
d. Compara los dos resultados.

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – La batería de un patinete eléctrico

Un fabricante de Barcelona anuncia que la batería de su patinete eléctrico dura, de media, 850 ciclos de carga. La duración sigue una normal con $\sigma = 50$ ciclos. Una revista prueba 25 baterías y obtiene una media de 820 ciclos.

a. Calcula el intervalo de confianza al 90 % para la duración media.
b. ¿Es creíble el anuncio del fabricante?
c. ¿Cambiaría la conclusión con un nivel del 99 %?

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – Control de calidad del arroz

Una envasadora de arroz de Valencia llena paquetes cuyo peso sigue una normal $N(1\,000;\ 20)$ gramos. El inspector toma cada hora una muestra de 16 paquetes y calcula el peso medio.

a. ¿Qué distribución sigue el peso medio de la muestra?
b. ¿Qué probabilidad hay de que el peso medio sea menor de 990 g?
c. Calcula $P(990$.
d. El inspector detiene la máquina si el peso medio es menor que un valor c que solo se alcanza por azar el 5 % de las veces. Calcula c.

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – Sondeo antes de las elecciones

En unas elecciones municipales un partido obtuvo el 35 % de los votos. Un mes después, un periódico hace un sondeo a 500 votantes elegidos al azar.

a. Si la intención de voto sigue siendo del 35 %, ¿qué distribución sigue la proporción muestral?
b. Calcula la probabilidad de que el sondeo dé más del 38 %.
c. Calcula la probabilidad de que el sondeo dé menos del 32 %.

d. El sondeo da un 40 %. ¿Te parece un resultado normal si nada ha cambiado? Justifícalo.

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – Problema: el gasto en telefonía móvil

Una organización de consumidores de Sevilla estudia el gasto mensual en telefonía móvil de los estudiantes universitarios. Se sabe por estudios anteriores que el gasto sigue una distribución normal con desviación típica $\sigma = 8$ euros. Se pregunta a 50 estudiantes elegidos al azar y se agrupan las respuestas en la tabla siguiente. La organización quiere publicar una estimación fiable del gasto medio y decidir si merece la pena repetir el estudio con más estudiantes.

Gasto (€)	[10, 20)	[20, 30)	[30, 40)	[40, 50)	[50, 60)
Estudiantes	6	14	18	9	3

a. Calcula la media muestral usando las marcas de clase.
b. Construye el intervalo de confianza al 95 % para el gasto medio.
c. ¿Cuántos estudiantes harían falta para que el error máximo fuera de 1 euro con la misma confianza?
d. ¿Y para un error de 0,5 euros? Compara con el apartado anterior.
e. Justifica la frase: «para reducir el error a la mitad hay que multiplicar la muestra por cuatro».

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – Problema: el comedor universitario

La universidad de una ciudad castellana quiere saber qué proporción de estudiantes está satisfecha con el comedor. Sus tres facultades tienen 2 000, 1 500 y 1 000 estudiantes. Se decide entrevistar a 360 estudiantes mediante muestreo estratificado con afijación proporcional. La tabla recoge, para cada facultad, cuántos de los entrevistados se declaran satisfechos.

Facultad	Estudiantes	Satisfechos en la muestra
Economía	2 000	96
Derecho	1 500	66
Educación	1 000	54

a. Calcula cuántos estudiantes se entrevistan en cada facultad.
b. Calcula la proporción de satisfechos en cada facultad y en el total de la muestra.
c. Construye un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de satisfechos de toda la universidad.
d. El rector afirma que «la mayoría de los estudiantes está satisfecha». ¿Lo apoyan los datos? Justifícalo.

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – Problema: el tiempo en las redes sociales

Dos equipos de investigación estudian cuántos minutos al día pasan los adolescentes en las redes sociales. Ambos suponen una distribución normal con $\sigma = 40$ minutos. El equipo A entrevista a 64 adolescentes y obtiene una media de 185 minutos; el equipo B entrevista a 256 y obtiene una media de 178 minutos. Un periódico titula: «Los dos estudios se contradicen».

a. Calcula el intervalo de confianza al 95 % del equipo A.
b. Calcula el intervalo de confianza al 95 % del equipo B.
c. ¿Por qué el intervalo de B es más estrecho?
d. ¿Se contradicen realmente los estudios? Razona usando los intervalos.
e. ¿Cuántos adolescentes habría que entrevistar para que el error máximo fuera de 2 minutos con una confianza del 99 %?

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Problema: piezas defectuosas en Vigo

Una fábrica de componentes para automóviles de Vigo garantiza a sus clientes que como mucho el 5 % de sus piezas es defectuoso. Un cliente revisa un lote de 400 piezas elegidas al azar y encuentra 28 defectuosas. Antes de reclamar, quiere estudiar si ese resultado es compatible con la garantía.

a. Calcula la proporción muestral de piezas defectuosas.
b. Construye el intervalo de confianza al 95 % para la proporción de defectuosas.
c. ¿Contradice el intervalo la garantía del 5 %?
d. Suponiendo que la proporción real es exactamente 0,05, calcula la probabilidad de encontrar en una muestra de 400 piezas una proporción de defectuosas igual o mayor que 0,07.
e. Con los dos resultados anteriores, ¿qué aconsejarías al cliente?

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Problema: reconstruir un estudio

En un informe sobre la estatura de los varones de 20 años de una región solo aparece este dato: «con una confianza del 95 %, la estatura media está entre 172,04 cm y 175,96 cm». Se sabe que la desviación típica poblacional es $\sigma = 10$ cm.

a. Halla la media muestral y el error máximo.
b. Calcula el tamaño de la muestra que se utilizó.
c. Con la misma muestra, ¿qué nivel de confianza correspondería a un intervalo de longitud 3 cm?
d. ¿Qué harías para obtener, con un 95 % de confianza, un intervalo de longitud 2 cm?

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: una encuesta con presupuesto limitado

Una ONG de Bilbao quiere estimar la proporción de vecinos que colaboraría como voluntario en un banco de alimentos. Cada entrevista le cuesta 3 euros y dispone de 2 000 euros. No tiene ninguna información previa sobre la proporción.

a. Demuestra que $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ para cualquier p entre 0 y 1.
b. ¿Cuántas entrevistas puede pagar como máximo?
c. ¿Qué error máximo puede garantizar con una confianza del 95 %?
d. Si se conforma con una confianza del 90 %, ¿cuál sería el error máximo?
e. ¿Qué presupuesto necesitaría para garantizar un error del 2 % al 95 %?