Soluciones del examen - Matrices

Curso: 2 Bachillerato Ccss · Duración: 90 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (4 puntos)

a. Primero $2A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$. Restamos B elemento a elemento: $2A - B = \begin{pmatrix} 4-1 & 2+1 \\ 0-2 & 6-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$. Multiplicar una matriz por un número multiplica cada uno de sus elementos. (1,5 puntos)

b. Fila de A por columna de B: $AB = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 2 & 2\cdot(-1) + 1\cdot 0 \\ 0\cdot 1 + 3\cdot 2 & 0\cdot(-1) + 3\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$. Como A y B son de orden 2×2, el producto existe y es otra matriz 2×2. (1,5 puntos)

c. $BA = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 - 1\cdot 0 & 1\cdot 1 - 1\cdot 3 \\ 2\cdot 2 + 0 & 2\cdot 1 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Como $BA \neq AB$, se comprueba que el producto de matrices no es conmutativo. Basta un elemento distinto, por ejemplo el de la posición (1,1): vale 4 en AB y 2 en BA. (1 punto)

Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

a. $|K| = 1\cdot 3 - 2\cdot 2 = 3 - 4 = -1$. Como el determinante es distinto de 0, la matriz es regular y existe K^{-1}. Una matriz cuadrada tiene inversa si y solo si su determinante no es nulo. (1 punto)

b. Intercambiamos la diagonal principal, cambiamos el signo de la secundaria y dividimos entre $|K|$: $K^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Este atajo solo sirve en orden 2; para matrices de orden 3 hay que recurrir a la matriz adjunta. (2 puntos)

c. $KK^{-1} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-3) + 2\cdot 2 & 1\cdot 2 + 2\cdot(-1) \\ 2\cdot(-3) + 3\cdot 2 & 2\cdot 2 + 3\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$. La inversa es correcta. También puede comprobarse $K^{-1}K = I$, que da el mismo resultado. (1 punto)

Solución del ejercicio 3 (3 puntos)

a. $|A| = 2\cdot 3 - 1\cdot 1 = 5 \neq 0$, así que existe la inversa: $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Se intercambian 2 y 3 en la diagonal principal, se cambia el signo de los dos unos de la secundaria y se divide entre 5. (1,5 puntos)

b. Multiplicamos por A^{-1} por la izquierda en los dos miembros: $X = A^{-1}B$. Entonces

$X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3\cdot 5 - 5 & 3\cdot 2 - 1 \\ -5 + 10 & -2 + 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Comprobación: $AX = \begin{pmatrix} 4+1 & 2+0 \\ 2+3 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = B$. No se puede escribir $X = BA^{-1}$: el producto no es conmutativo y el orden de los factores importa. (1,5 puntos)

Solución: $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución del ejercicio 4 (3 puntos)

a. Determinante de orden 2: $|A| = k \cdot k - 4 \cdot 1 = k^2 - 4$. El determinante resulta ser un polinomio de segundo grado en k. (1 punto)
b. La inversa no existe cuando el determinante se anula: $k^2 - 4 = 0$, es decir, $k = 2$ y $k = -2$. Para cualquier otro valor de k, A es invertible. Para $k = \pm 2$ las filas son proporcionales; con $k = 2$, la primera fila $(2, 4)$ es el doble de la segunda, $(1, 2)$. (1 punto)
c. Para $k = 3$: $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $|A| = 9 - 4 = 5$. Con la fórmula de orden 2, $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Comprobación: $AA^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 9-4 & -12+12 \\ 3-3 & -4+9 \end{pmatrix} = I$. (1 punto)

Solución del ejercicio 5 (6 puntos)

a. Con $p = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$: , es decir, 90 €, 160 € y 110 €. V es 3×2 y p es 2×1 : el producto es una columna 3×1, con una fila por cafetería. Por ejemplo, la primera: $30 \cdot 2 + 10 \cdot 3 = 90$. (1,5 puntos)
b. Con $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$: , es decir, 50 €, 100 € y 70 €. Para la segunda cafetería: $20 \cdot 1 + 40 \cdot 2 = 100$. (1,5 puntos)
c. $p - c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y : 40 €, 60 € y 40 €. Coinciden con ingresos menos costes. (1,5 puntos)
d. $40 + 60 + 40 = 140$ €. (0,5 puntos)
e. La cafetería 2, con 60 € de beneficio. Aunque la cafetería 3 ingresa más que la 1, ambas obtienen el mismo beneficio, 40 €. (1 punto)