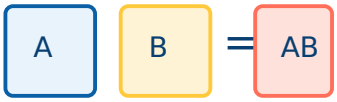
Apuntes - Matrices

Curso: 2 Bachillerato Ccss

Las matrices sirven para organizar datos (ventas, costes, producción, redes) y resolver sistemas. Aquí aprenderás sus operaciones, el determinante, la inversa y las ecuaciones matriciales, como en la PAU de Ciencias Sociales.

Actividad de introducción: la tabla de ventas

Dos panaderías venden barras, magdalenas y empanadas. Los datos del día se ordenan en una tabla con una fila por tienda y una columna por producto. Si además se anotan los precios, el ingreso de cada tienda se obtiene multiplicando cada cantidad por su precio y sumando: eso es, exactamente, un producto de matrices. Las matrices son tablas de números con reglas de cálculo que permiten manejar mucha información a la vez: ventas por tienda, costes por proveedor, trayectos entre ciudades o reparto de clientes entre empresas. Además, con el determinante y la matriz inversa se pueden resolver sistemas de ecuaciones y ecuaciones con matrices, que es una de las tareas más frecuentes en la prueba de acceso a la universidad de Ciencias Sociales.



Qué es una matriz

Definición: matriz

Una **matriz** de dimensión $m \times n$ es una tabla de números con m filas y n columnas. El elemento a_{ij} está en la fila i y la columna j. Es **cuadrada** si $m = n$, **diagonal** si solo tiene elementos no nulos en la diagonal principal e **identidad** I si además estos valen 1. La **traspuesta** A^t se obtiene cambiando filas por columnas.

Ejemplo 1

Una tienda vende dos modelos de móvil: 30 y 20 unidades en enero, 25 y 40 en febrero. Escribe la matriz de ventas.

Filas = meses, columnas = modelos: $V = \begin{pmatrix} 30 & 20 \\ 25 & 40 \end{pmatrix}$, de dimensión 2×2. El elemento $a_{21} = 25$ son las unidades del modelo 1 vendidas en febrero.

Operaciones con matrices

Regla: suma y producto por un número

La suma y la resta solo se hacen entre matrices de la misma dimensión, elemento a elemento. El producto kA multiplica cada elemento por k.

Regla: producto de matrices

$A \cdot B$ solo existe si las columnas de A coinciden con las filas de B. Si A es $m \times n$ y B es $n \times p$, el resultado es $m \times p$ y $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$ (fila i por columna j).

Propiedad: producto

El producto es asociativo y distributivo, $AI = IA = A$ y $(AB)^t = B^t A^t$. **No es conmutativo**: en general $AB \neq BA$.

Ejemplo 2

Calcula AB y BA con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

AB: fila 1 por columna 1: $2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 4$; fila 1 por columna 2: $2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$; fila 2 por columna 1: $5 + 6 = 11$; fila 2 por columna 2: 3. Así $AB = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 11 & 3 \end{pmatrix}$. Por otro lado $BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 12 & 7 \end{pmatrix} \neq AB$.

Ejemplo 3

Una tienda vende 30 unidades del modelo A (200 €) y 20 del B (300 €) en enero, y 25 y 40 en febrero. Calcula la facturación mensual.

$VP = \begin{pmatrix} 30 & 20 \\ 25 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12000 \\ 17000 \end{pmatrix}$: 12 000 € en enero y 17 000 € en febrero.

¡Atención!

No uses las identidades notables como si las matrices conmutaran: $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$, y en general no es $A^2 + 2AB + B^2$. Antes de multiplicar, escribe las dimensiones: $(m \times n) \cdot (n \times p)$.

Determinante

Definición: determinante

El **determinante** de una matriz cuadrada es un número que indica si tiene inversa.

En orden 2: [redacted]. En orden 3 se usa la regla de Sarrus: se suman los productos de la diagonal principal y de sus dos paralelas, y se restan los de la diagonal secundaria y sus paralelas.

Propiedad: determinante nulo

El determinante vale 0 si hay una fila (o columna) de ceros, dos filas iguales o proporcionales, o una fila combinación lineal de las otras.

Ejemplo 4

Calcula [redacted].

Principales: $1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \cdot 0 = 13$. Secundarias: $0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0$. El determinante es $13 - 0 = 13$.

Matriz inversa

Definición: matriz inversa

La inversa de A es la matriz A^{-1} tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Existe si y solo si $|A| \neq 0$.

Regla: inversa de orden 2

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $|A| \neq 0$, entonces $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. En general, $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}(\operatorname{Adj} A)^t$.

Método: inversa por Gauss-Jordan

1. Escribe la matriz ampliada $(A \,|\, I)$.
2. Haz operaciones entre filas hasta convertir A en I.
3. La matriz que queda a la derecha es A^{-1}.
4. Comprueba que $AA^{-1} = I$.

Ejemplo 5

Halla la inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

$|A| = 6 - 5 = 1$. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$. Comprobación: $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 6-5 & -2+2 \\ 15-15 & -5+6 \end{pmatrix} = I$.

Ejemplo 6

¿Para qué valores de k tiene inversa $\begin{pmatrix} k & 3 \\ 2 & k+1 \end{pmatrix}$?

$|A| = k(k+1) - 6 = k^2 + k - 6 = (k+3)(k-2)$. Se anula en $k = -3$ y $k = 2$. Hay inversa para todo $k \neq -3, 2$.

¡Atención!

Comprueba siempre que $|A| \neq 0$ antes de calcular la inversa. Y recuerda que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, no $A^{-1}B^{-1}$.

Ecuaciones matriciales

Regla: despeje

Como el producto no es conmutativo, se multiplica por la inversa *por el mismo lado* en los dos miembros. Si $AX = B$, $X = A^{-1}B$. Si $XA = B$, $X = BA^{-1}$. Si $AX + C = B$, primero $AX = B - C$ y luego $X = A^{-1}(B - C)$.

Método: resolver una ecuación matricial

1. Aísla el término que contiene a X.
2. Comprueba que la matriz que multiplica a X tiene inversa.
3. Multiplica por la inversa por el lado correcto.
4. Calcula el producto y comprueba el resultado.

Ejemplo 7

Resuelve $AX = B$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Observación

En la PAU de Ciencias Sociales las matrices suelen aparecer con varios apartados: operaciones, ecuación matricial $AX = B$ o $XA + B = C$, y un problema de producción o coste. Las matrices de adyacencia de un grafo permiten contar recorridos: el elemento (i, j) de M^2 es el número de caminos de dos tramos entre i y j.

Matrices en contextos económicos

Observación: leer el producto en el contexto

En un problema de economía, cada matriz tiene una interpretación clara: las filas son los objetos (tiendas, fábricas, años) y las columnas son los atributos (productos, materias primas, costes). El producto $A \cdot B$ solo tiene sentido si las columnas de A coinciden con las filas de B, y eso refleja que el atributo de A debe coincidir con el objeto de B: los productos de las ventas con los productos de la tabla de precios. Si las dimensiones no cuadran, hay que revisar el planteamiento o trasponer una de las matrices.

Ejemplo 8

Una tienda vende 10 camisetas y 6 gorras al día en el turno de mañana y 4 camisetas y 8 gorras por la tarde. Camiseta: 12 €; gorra: 8 €. ¿Cuánto ingresa en cada turno?

Matriz de ventas $V = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ y precios $P = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$. El producto es $VP = \begin{pmatrix} 10 \cdot 12 + 6 \cdot 8 \\ 4 \cdot 12 + 8 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 168 \\ 112 \end{pmatrix}$. Por la mañana ingresa 168 € y por la tarde 112 €.

Inversa y ecuaciones: un método ordenado

Método: despejar una ecuación matricial

1. Identifica en qué lado está multiplicada la incógnita (AX o XA).
2. Despeja los sumandos con la incógnita en un lado y el resto en el otro.
3. Multiplica por A^{-1} en el mismo lado en que A multiplicaba a X (por la izquierda si es AX y por la derecha si es XA), porque el producto no es conmutativo.
4. Calcula la inversa comprobando antes que $|A| \neq 0$.
5. Haz el producto final con cuidado y comprueba sustituyendo en la ecuación de partida.

Ejemplo 9

Resuelve $AX + B = C$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Despejamos $AX = C - B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Como $|A| = 1$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $X = A^{-1}(C - B) = \begin{pmatrix} 2-2 & 2-1 \\ -2+4 & -2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Comprobación:

$$AX + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = C.$$

Matrices de transición y grafos

Definición: matriz de transición

Una matriz de transición recoge, en cada fila, en qué proporción los individuos de un estado pasan a cada uno de los estados en el periodo siguiente. Por eso todos sus elementos están entre 0 y 1 y cada fila suma exactamente 1. Si v es el vector fila con el reparto actual, el reparto del periodo siguiente es $v \cdot M$, el de dentro de dos periodos es $v \cdot M^2$, y así sucesivamente. Del mismo modo, la matriz de un grafo tiene un 1 en la posición (i, j) cuando hay conexión directa entre i y j; su cuadrado cuenta los caminos que usan exactamente dos tramos.

Ejemplo 10

Cada mes, el 80 % de los clientes de la compañía A se queda en A y el 20 % se cambia a B; en B se queda el 70 % y el 30 % pasa a A. Si este mes hay 500 clientes en cada compañía, ¿cuántos habrá el mes que viene?

La matriz de transición es $M = (0{,}8 \quad 0{,}2 \backslash 0{,}3 \quad 0{,}7)$ y el vector inicial es $v = (500,\ 500)$. Entonces $vM = (500 \cdot 0{,}8 + 500 \cdot 0{,}3,\ 500 \cdot 0{,}2 + 500 \cdot 0{,}7) = (550,\ 450)$. La compañía A gana 50 clientes. Si se repite el cálculo muchos meses, el reparto se estabiliza en el 60 % para A y el 40 % para B, que es el vector que no cambia al multiplicarlo por M: se comprueba con $(600,\ 400)M = (480 + 120,\ 120 + 280) = (600,\ 400)$.

¡Atención!

Errores típicos: multiplicar matrices elemento a elemento (el producto es fila por columna), olvidar que $AB \neq BA$, intentar invertir una matriz cuyo determinante es cero, y aplicar A^{-1} por el lado equivocado al despejar. Un buen hábito es escribir las dimensiones de cada matriz antes de multiplicar.

¿Sabías que?

La palabra «matriz» fue introducida por James Joseph Sylvester en 1850 y Arthur Cayley desarrolló el álgebra matricial pocos años después. Hoy las matrices están en todas partes: los buscadores calculan el orden de las páginas con una gran matriz de enlaces, los videojuegos giran los objetos con matrices y los economistas usan modelos de entrada-salida, que valieron el Premio Nobel a Wassily Leontief en 1973.

El consejo de Otto

Antes de multiplicar dos matrices escribe sus dimensiones una al lado de la otra. Si los números del centro coinciden, se puede multiplicar. Y comprueba cada inversa

multiplicándola por la matriz original.