Ejercicios - Matrices

Curso: 2 Bachillerato Ccss · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Suma y producto por un número

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, calcula:

a. $A + B$
b. $A - B$
c. $2A - 3B$
d. La dimensión de cada matriz.

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – El producto no es conmutativo

Con las mismas matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$:

a. Calcula $A \cdot B$.
b. Calcula $B \cdot A$.
c. ¿Se cumple $AB = BA$?

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Dimensiones y producto

Sean $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y .

a. Indica la dimensión de C y de D.
b. ¿Se pueden calcular $C \cdot D$ y $D \cdot C$? ¿Qué dimensión tienen?
c. Calcula $C \cdot D$.

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Traspuesta e identidad

Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ y $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calcula la traspuesta M^t y su dimensión.
b. Calcula $I \cdot M$.
c. Calcula $M \cdot M^t$.

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Determinantes

Calcula los determinantes siguientes y di cuáles de las matrices tienen inversa.

a. 

b. 

c.  (regla de Sarrus)

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Inversa de una matriz 2×2

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

a. Calcula $|A|$.
b. Calcula A^{-1} con la fórmula $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
c. Comprueba que $A \cdot A^{-1} = I$.

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – Ecuación matricial AX = B

Resuelve la ecuación $AX = B$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Comprueba que A tiene inversa.
b. Despeja X.
c. Calcula A^{-1}.
d. Calcula X y comprueba.

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – Otra ecuación matricial

Resuelve $XA + B = C$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

a. Despeja X (atención al orden del producto).
b. Calcula A^{-1}.
c. Calcula $C - B$ y X.

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – Ventas semanales de dos panaderías

Dos panaderías de Burgos venden tres productos: barras, magdalenas y empanadas. Las matrices recogen las unidades vendidas en un día y los precios (en euros).

	Barras	Magdalenas	Empanadas
Panadería A	20	30	10
Panadería B	15	25	20
Precio (€)	3	2	5

a. Escribe la matriz de ventas V (2×3, una fila por panadería) y el vector de precios P.
b. Calcula $V \cdot P$ e interpreta cada elemento.
c. ¿Qué panadería ingresa más?
d. ¿Cuánto ingresan entre las dos en una semana de 6 días?

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – Materias primas y costes

Una fábrica de muebles de Valencia produce tres modelos de estantería. La matriz M (filas: modelos; columnas: madera y tornillos) indica las unidades de cada materia prima por estantería, y la matriz C (filas: madera y tornillos; columnas: proveedor 1 y proveedor 2) da el precio de cada materia prima en cada proveedor.

Modelo	Madera	Tornillos
Estantería 1	2	1
Estantería 2	1	3
Estantería 3	0	2

a. Escribe las dimensiones de M, de C y de $M \cdot C$.
b. Calcula $M \cdot C$.
c. Interpreta el elemento de la fila 2 y columna 1.
d. ¿Con qué proveedor sale más barato el modelo 3?

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – Rutas de autobús entre cuatro barrios

Cuatro barrios, numerados del 1 al 4, están unidos por líneas directas de autobús. La matriz G tiene un 1 en la posición (i, j) si hay línea directa del barrio i al j y un 0 si no la hay.

Matriz:

a. Interpreta el elemento $g_{23} = 1$ y el elemento $g_{14} = 0$.
b. Calcula G^2.
c. Interpreta el elemento $(G^2)_{14}$.
d. Interpreta el elemento $(G^2)_{11}$.

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – Dos compañías telefónicas

En una ciudad hay dos compañías, A y B. Cada mes el 80 % de los clientes de A se queda en A y el 20 % se pasa a B; el 70 % de los clientes de B se queda en B y el 30 % se pasa a A. Hoy A tiene 1 000 clientes y B tiene 500. La matriz de transición es $T = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

a. Explica qué significa cada fila de T y comprueba que suma 1.
b. Calcula el reparto de clientes dentro de un mes, $v_1 = v_0 \cdot T$.
c. Calcula el reparto dentro de dos meses, $v_2 = v_1 \cdot T$.
d. ¿Cambia el número total de clientes?

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – Los precios de los bocadillos

En una cantina universitaria de Granada se piden tres combinaciones de bocadillo (x €), refresco (y €) y postre (z €). La primera mesa pide 2 bocadillos, 1 refresco y 1 postre y paga 9 €; la segunda pide 1 bocadillo, 2 refrescos y 1 postre y paga 7 €; la tercera pide 1 bocadillo, 1 refresco y 3 postres y paga 10 €.

a. Escribe el sistema en forma matricial $SX = T$.
b. Calcula $|S|$ y comprueba que S tiene inversa.

c. Con , calcula $X = S^{-1}T$.

d. Comprueba que los precios obtenidos cumplen las tres cuentas.

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – Matriz con parámetro

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Calcula $|A|$ en función de k.
b. ¿Para qué valores de k no existe A^{-1}?
c. Calcula A^{-1} para $k = 0$.
d. Calcula A^{-1} para $k = 1$.

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – Problema: las dos sucursales de una tienda de ropa

Una tienda de ropa de Zaragoza tiene dos sucursales, Centro y Norte. La matriz V recoge las unidades vendidas en un mes (columnas: camisetas, pantalones, sudaderas). El precio de venta es $p = (12,\ 30,\ 40)$ euros y el coste por unidad es $c = (7,\ 18,\ 22)$ euros.

	Camisetas	Pantalones	Sudaderas
Centro	40	25	15
Norte	30	20	10

a. Calcula los ingresos de cada sucursal, $V \cdot p^t$.
b. Calcula los costes de cada sucursal, $V \cdot c^t$.
c. Calcula el beneficio de cada sucursal como $V \cdot (p - c)^t$ y comprueba que coincide con ingresos menos costes.
d. ¿Qué beneficio total obtiene la empresa en el mes?
e. Si las ventas de ambas sucursales suben un 10 %, ¿cuál es el nuevo beneficio total?

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – Problema: dos sectores de una economía

En una pequeña economía hay dos sectores, agricultura (A) e industria (I). Para producir una unidad de A se consumen $0{,}2$ unidades de A y $0{,}4$ de I; para producir una

unidad de I se consumen $0{,}3$ de A y $0{,}1$ de I. La matriz tecnológica es $T = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}1 \end{pmatrix}$. La demanda externa es de 120 unidades de A y 180 de I. Si X es el vector de producción, se cumple $X = TX + D$.

a. Despeja X y explica por qué hay que calcular $(I - T)^{-1}$.
b. Calcula $I - T$ y su determinante.
c. Calcula $(I - T)^{-1}$.
d. Calcula la producción necesaria $X = (I - T)^{-1}D$.
e. Comprueba el resultado y explica el significado.

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – Problema: reparto de una inversión

Una persona invierte 10 000 € en tres fondos: un fondo seguro con rentabilidad del 2 %, uno mixto del 4 % y uno de renta variable del 6 %. Al cabo de un año ha ganado 380 €. Además, lo invertido en el fondo seguro es el doble de lo invertido en renta variable. Sean x, y y z las cantidades en el seguro, el mixto y la renta variable.

a. Plantea el sistema de tres ecuaciones.
b. Escríbelo en forma matricial $AX = B$.
c. Resuelve por sustitución o por Gauss.
d. Comprueba la solución y calcula la rentabilidad media de la cartera.

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Problema: el reparto a largo plazo

Con la matriz de transición del ejercicio de las compañías telefónicas, $T = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$, se quiere saber cómo se reparte el mercado a largo plazo. Un reparto $(a,\ b)$ con $a + b = 1$ es estable si $(a\ \ b)\,T = (a\ \ b)$.

a. Escribe las dos ecuaciones que resultan de $(a\ \ b)T = (a\ \ b)$.
b. Simplifica la primera y combínala con $a + b = 1$.
c. Resuelve y escribe el reparto estable.
d. Si hay 1 500 clientes en total, ¿cuántos tendrá cada compañía a largo plazo?
e. Comprueba que el reparto estable no cambia al multiplicarlo por T.

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Problema: ahorro mensual con una matriz

Una persona tiene 200 € ahorrados y cada mes añade 50 €. Si S_n es el ahorro tras n meses, se cumple $\begin{pmatrix} S_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} S_n \\ 1 \end{pmatrix}$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 50 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Comprueba que $A\begin{pmatrix} S_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_n + 50 \\ 1 \end{pmatrix}$.
b. Calcula A^2 y A^3.
c. Deduce la expresión de A^n.
d. Calcula el ahorro a los 12 meses con $A^{12}\begin{pmatrix} 200 \\ 1 \end{pmatrix}$.
e. ¿Cuántos meses hacen falta para llegar a 1 000 €?

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: matrices

Resuelve estos retos de matrices.

a. Para $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula A^2 y A^4.
b. Si A es de orden 2×2 con $|A| = 4$, calcula $|3A|$, $|A^t|$ y $|A^{-1}|$.
c. Halla x para que $\begin{pmatrix} x & 2 \\ 3 & x+1 \end{pmatrix}$ no tenga inversa.
d. Con las matrices A y B del primer ejercicio, comprueba que $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.