Soluciones - Matrices

Curso: 2 Bachillerato Ccss

Solución del ejercicio 1

a. Para sumar matrices de la misma dimensión se suman los elementos que ocupan la misma posición: $A+B=\begin{pmatrix}1+0 & 2+4\\ 3-2 & -1+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 1 & 4\end{pmatrix}$.

b. Restamos elemento a elemento: $A-B=\begin{pmatrix}1-0 & 2-4\\ 3+2 & -1-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 5 & -6\end{pmatrix}$.

c. Primero multiplicamos cada matriz por su número: $2A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 6 & -2\end{pmatrix}$ y $3B=\begin{pmatrix}0 & 12\\ -6 & 15\end{pmatrix}$. Después restamos: $2A-3B=\begin{pmatrix}2 & -8\\ 12 & -17\end{pmatrix}$.

d. Las dos matrices tienen 2 filas y 2 columnas, así que son de dimensión 2×2 (matrices cuadradas de orden 2), y por eso se pueden sumar y restar.

Solución del ejercicio 2

a. Cada elemento de AB es la fila de A por la columna de B. Por ejemplo, el elemento $(1,1)$ es $1\cdot 0+2\cdot(-2)=-4$ y el $(1,2)$ es $1\cdot 4+2\cdot 5=14$. Resulta $AB=\begin{pmatrix}-4 & 14\\ 2 & 7\end{pmatrix}$.

b. Ahora las filas de B por las columnas de A: el elemento $(1,1)$ es $0\cdot 1+4\cdot 3=12$ y el $(2,1)$ es $-2\cdot 1+5\cdot 3=13$. Resulta $BA=\begin{pmatrix}12 & -4\\ 13 & -9\end{pmatrix}$.

c. No se cumple: $AB\neq BA$, ya que, por ejemplo, sus primeros elementos son -4 y 12. El producto de matrices no es conmutativo, así que el orden de los factores importa.

Solución del ejercicio 3

a. C tiene 2 filas y 3 columnas, así que es 2×3; D tiene 3 filas y 2 columnas, así que es 3×2.

b. Un producto existe si el número de columnas del primer factor coincide con el de filas del segundo. CD: $(2\times 3)\cdot(3\times 2)$, existe y es 2×2. DC: $(3\times 2)\cdot(2\times 3)$, existe y es 3×3.

c. Fila por columna: el elemento $(1,1)$ es $1\cdot 1+0\cdot 0+2\cdot 3=7$ y el $(1,2)$ es $1\cdot 1+0\cdot 2+2\cdot(-1)=-1$. Del mismo modo con la segunda fila: $CD=\begin{pmatrix}7 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$.

Solución del ejercicio 4

a. La traspuesta se obtiene cambiando filas por columnas: la primera fila de M pasa a ser la primera columna. , de dimensión 3×2.

b. I es 2×2 y M es 2×3, así que el producto existe. Como la identidad es el elemento neutro del producto, $IM = M$.

c. MM^t es 2×2. Sus elementos: $1 + 4 + 9 = 14$, $4 + 10 + 18 = 32$, $4 + 10 + 18 = 32$ y $16 + 25 + 36 = 77$. Así $MM^t = \begin{pmatrix} 14 & 32 \\ 32 & 77 \end{pmatrix}$, una matriz simétrica, como ocurre siempre con MM^t.

Solución del ejercicio 5

a. Determinante de orden 2: producto de la diagonal principal menos producto de la secundaria. $3 \cdot 4 - 5 \cdot 2 = 12 - 10 = 2$. Como es distinto de 0, la matriz tiene inversa.

b. $2 \cdot 3 - 6 \cdot 1 = 6 - 6 = 0$. La matriz no tiene inversa; de hecho, la primera fila es el doble de la segunda.

c. Regla de Sarrus. Términos positivos: $1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \cdot 0 = 1 + 12 + 0 = 13$. Términos negativos: $0 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 0 = 0$. Luego $\det = 13 - 0 = 13 \neq 0$: tiene inversa.

Solución del ejercicio 6

a. $|A| = 3 \cdot 4 - 5 \cdot 2 = 12 - 10 = 2$. Como es distinto de 0, la inversa existe.

b. En la fórmula se intercambian los elementos de la diagonal principal, se cambia el signo de los de la secundaria y se divide entre el determinante:

.

c. Multiplicamos fila por columna:
$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) & 3 \cdot (-\frac{5}{2}) + 5 \cdot \frac{3}{2} \\ 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) & 2 \cdot (-\frac{5}{2}) + 4 \cdot \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Obtenemos la identidad, así que la inversa es correcta.

Solución del ejercicio 7

a. $|A| = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$, así que A tiene inversa y la ecuación tiene solución única.

b. Multiplicamos los dos miembros por A^{-1} por la izquierda (el orden importa): $A^{-1}AX = A^{-1}B$, es decir, $X = A^{-1}B$.

c. Con la fórmula de la inversa de orden 2: $A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

d. $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1\cdot 4 - 1\cdot 1 & 1\cdot 3 - 1\cdot 2 \\ -4+2 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Comprobación: $AX = \begin{pmatrix} 6-2 & 2+1 \\ 3-2 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = B$.

Solución del ejercicio 8

a. Primero pasamos B restando: $XA = C - B$. Como A multiplica a X por la derecha, multiplicamos por A^{-1} también por la derecha: $X = (C-B)A^{-1}$. Escribir $A^{-1}(C-B)$ sería un error, porque el producto no es conmutativo.

b. $|A| = 1\cdot 1 - 2\cdot 0 = 1$. Con la fórmula de orden 2, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c. $C - B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Entonces $X = (C-B)A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -4+4 \\ 1 & -2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Comprobación: $XA + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + B = C$.

Solución del ejercicio 9

a. $V = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 10 \\ 15 & 25 & 20 \end{pmatrix}$ y (barra 3 €, magdalena 2 € y empanada 5 € por unidad).

b. $VP = \begin{pmatrix} 170 \\ 195 \end{pmatrix}$: la primera panadería ingresa 170 € al día y la segunda 195 €.

c. La segunda, con 195 € frente a 170 €.

d. $6\cdot(170+195) = 6\cdot 365 = 2\,190$ €.

Solución del ejercicio 10

a. M es 3×2, C es 2×2 y MC es 3×2.

b. .

c. $(MC)_{21} = 1\cdot 4 + 3\cdot 5 = 19$ €: coste de materias primas del modelo 2 con el proveedor 1.

d. Modelo 3 (fila 3): proveedor 1 cuesta 10 € y proveedor 2 cuesta 4 €; resulta más

barato el proveedor 2.

Solución del ejercicio 11

a. $g_{23} = 1$: hay línea directa del barrio 2 al barrio 3. $g_{14} = 0$: no hay línea directa del barrio 1 al 4.

b. .

c. $(G^2)_{14} = 2$: hay 2 recorridos con una sola parada intermedia del barrio 1 al 4 (por el 2 o por el 3).

d. $(G^2)_{11} = 2$: hay 2 recorridos de ida y vuelta de longitud 2 que parten y terminan en el barrio 1 (por el 2 o por el 3).

Solución del ejercicio 12

a. La fila 1 da el destino de los clientes de A ($0{,}8 + 0{,}2 = 1$) y la fila 2 el de B ($0{,}3 + 0{,}7 = 1$).

b. $v_1 = (1000 \;\; 500)T = (800 + 150 \;\; 200 + 350) = (950 \;\; 550)$.

c. $v_2 = (950 \;\; 550)T = (760 + 165 \;\; 190 + 385) = (925 \;\; 575)$.

d. No: $925 + 575 = 1\,500 = 1\,000 + 500$. La matriz de transición conserva el total.

Solución del ejercicio 13

a. Cada mesa da una ecuación: $2x + y + z = 9$, $x + 2y + z = 7$, $x + y + 3z = 10$. En forma matricial: .

b. Por Sarrus: $|S| = (12 + 1 + 1) - (2 + 2 + 3) = 14 - 7 = 7$. Como $|S| \neq 0$, S tiene inversa y el sistema tiene solución única.

c. . El bocadillo cuesta 3 €, el refresco 1 € y el postre 2 €.

d. Primera mesa: $2 \cdot 3 + 1 + 2 = 9$. Segunda: $3 + 2 \cdot 1 + 2 = 7$. Tercera: $3 + 1 + 3 \cdot 2 = 10$. Las tres cuentas coinciden.

Solución del ejercicio 14

a. $|A| = 1 \cdot 3 - k \cdot 2 = 3 - 2k$.

b. Una matriz cuadrada tiene inversa si y solo si su determinante no es nulo. $3-2k=0$ da $k=\frac{3}{2}$: para ese valor no existe A^{-1}; para cualquier otro, sí.

c. Para $k=0$: $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $|A|=3$ y .

d. Para $k=1$: $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $|A|=1$ y $A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$. Comprobación: $AA^{-1}=\begin{pmatrix}3-2 & -1+1\\ 6-6 & -2+3\end{pmatrix}=I$.

Solución del ejercicio 15

a. $Vp^t=\begin{pmatrix}1830\\ 1360\end{pmatrix}$: Centro 1 830 € y Norte 1 360 €.

b. $Vc^t=\begin{pmatrix}1060\\ 790\end{pmatrix}$: Centro 1 060 € y Norte 790 €.

c. $p-c=(5,\ 12,\ 18)$ y $V(p-c)^t=\begin{pmatrix}770\\ 570\end{pmatrix}$. Comprobación: $1\,830-1\,060=770$ y $1\,360-790=570$.

d. $770+570=1\,340$ €.

e. Al multiplicar V por $1{,}1$ el beneficio también se multiplica por $1{,}1$: $1\,340\cdot 1{,}1=1\,474$ €.

Solución del ejercicio 16

a. $X=TX+D$ implica $(I-T)X=D$ y $X=(I-T)^{-1}D$, si $I-T$ tiene inversa.

b. y $|I-T|=0{,}72-0{,}12=0{,}6\neq 0$.

c. $(I-T)^{-1}=\frac{1}{0{,}6}\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}3\\ 0{,}4 & 0{,}8\end{pmatrix}$.

d. $X=\frac{1}{0{,}6}\begin{pmatrix}0{,}9\cdot 120+0{,}3\cdot 180\\ 0{,}4\cdot 120+0{,}8\cdot 180\end{pmatrix}=\frac{1}{0{,}6}\begin{pmatrix}162\\ 192\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}270\\ 320\end{pmatrix}$.

e. $TX+D$: $0{,}2\cdot 270+0{,}3\cdot 320+120=270$ y $0{,}4\cdot 270+0{,}1\cdot 320+180=320$. Hay que producir 270 unidades de A y 320 de I para cubrir la demanda externa y el consumo interno.

Solución del ejercicio 17

a. $x+y+z=10\,000$; $0{,}02x+0{,}04y+0{,}06z=380$; $x=2z$ (es decir, $x-2z=0$).

b. Multiplicando la segunda ecuación por 100: [redacted].

c. De $x = 2z$: $y = 10\,000 - 3z$. En la segunda: $0{,}04z + 0{,}04(10\,000 - 3z) + 0{,}06z = 380$, es decir $-0{,}02z + 400 = 380$ y $z = 1\,000$. Entonces $x = 2\,000$ e $y = 7\,000$.

d. $2\,000 + 7\,000 + 1\,000 = 10\,000$; $40 + 280 + 60 = 380$. La rentabilidad media es $\dfrac{380}{10\,000} = 3{,}8\ \%$.

Solución del ejercicio 18

a. $0{,}8a + 0{,}3b = a$ y $0{,}2a + 0{,}7b = b$.

b. La primera da $0{,}3b = 0{,}2a$, es decir $a = 1{,}5b$. Con $a + b = 1$: $2{,}5b = 1$.

c. $b = 0{,}4$ y $a = 0{,}6$: reparto estable del 60 % para A y 40 % para B.

d. A: $0{,}6 \cdot 1\,500 = 900$ clientes; B: $0{,}4 \cdot 1\,500 = 600$ clientes.

e. $(0{,}6 \;\; 0{,}4)T = (0{,}48 + 0{,}12 \quad 0{,}12 + 0{,}28) = (0{,}6 \;\; 0{,}4)$. Se cumple.

Solución del ejercicio 19

a. Multiplicamos fila por columna: la primera fila da $1 \cdot S_n + 50 \cdot 1 = S_n + 50$ y la segunda $0 \cdot S_n + 1 \cdot 1 = 1$. Así $A \begin{pmatrix} S_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_n + 50 \\ 1 \end{pmatrix}$: cada mes se suman 50 €.

b. $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 150 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c. Cada potencia suma 50 en la esquina superior derecha, así que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 50n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (se demuestra por inducción).

d. $A^{12} \begin{pmatrix} 200 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 + 50 \cdot 12 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800 \\ 1 \end{pmatrix}$: a los 12 meses tiene 800 €.

e. $200 + 50n = 1\,000$ da $n = 16$ meses.

Solución del ejercicio 20

a. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) & 0 \\ 0 & -1 \cdot 1 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$. Entonces $A^4 = (A^2)^2 = (-I)^2 = I$.

b. En orden 2, multiplicar la matriz por 3 multiplica cada fila por 3, y el determinante por 3^2: $|3A| = 9 \cdot 4 = 36$. La traspuesta tiene el mismo determinante: $|A^t| = 4$. Y $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{4}$.

c. No tiene inversa si su determinante es 0: $x(x + 1) - 6 = 0$, es decir,

$x^2 + x - 6 = 0$, con $x = 2$ o $x = -3$.

d. $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 7 & 30 \\ 5 & 22 \end{pmatrix}$, mientras que $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} -9 & 48 \\ -6 & 38 \end{pmatrix}$.
Son distintas porque $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ y $AB \neq BA$.