Soluciones del examen - Límites y continuidad

Curso: 2 Bachillerato Ccss · Duración: 90 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (4 puntos)

a. Al sustituir sale $\frac{0}{0}$. Factorizamos la diferencia de cuadrados: $\frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = x+4 \to 8$. (1 punto)

b. Es una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ con numerador y denominador del mismo grado: el límite es el cociente de los coeficientes principales, $\frac{5}{2}$. (1 punto)

c. Sale $\frac{0}{0}$. Factorizamos el denominador: $\frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{x+3} \to \frac{1}{6}$. (1 punto)

d. El grado del numerador (1) es menor que el del denominador (3): el denominador crece mucho más deprisa y el límite es 0. (1 punto)

Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

a. El denominador se anula en $x=-1$, así que $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. No hay más restricciones, porque se trata de un cociente de polinomios. (0,5 puntos)

b. En $x=-1$ el numerador vale $-6 \neq 0$: hay asíntota vertical $x=-1$, con $\lim_{x\to -1^+} f = -\infty$ y $\lim_{x\to -1^-} f = +\infty$. Como los grados son iguales, $\lim_{x\to \pm\infty} f = \frac{2}{1} = 2$: asíntota horizontal $y=2$. (2 puntos)

c. Eje Y: $f(0) = \frac{-4}{1} = -4$, punto $(0,-4)$. Eje X: la fracción se anula si el numerador es cero, $2x-4=0$, $x=2$, punto $(2,0)$.

d. $f(3) = \frac{2}{4} = 0{,}5$ y $f(-3) = \frac{-10}{-2} = 5$. (0,5 puntos)

Solución del ejercicio 3 (3 puntos)

a. Por la izquierda (y en $x=1$) se usa el primer tramo: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 1+a$. Por la derecha, el segundo: $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3\cdot 1 - 1 = 2$. Para que exista el límite en $x=1$, los dos límites laterales deben ser iguales. (1,5 puntos)

b. Para que f sea continua en $x=1$, los límites laterales y el valor deben coincidir: $1+a=2$, luego $a=1$. (1 punto)

c. Con $a=1$: $f(0) = 0^2+1 = 1$, usando el primer tramo porque $0 \leq 1$, y $f(2) = 3\cdot 2 - 1 = 5$, usando el segundo porque $2 > 1$. Comprobación de la

continuidad: $f(1) = 1 + 1 = 2$, que coincide con el límite por la derecha. (0,5 puntos)

Solución del ejercicio 4 (3 puntos)

a. Al sustituir sale $\frac{0}{0}$. Factorizamos: $\dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x + 3$, que tiende a 6 cuando $x \to 3$. (1 punto)
b. El límite en $x = 3$ existe y es finito (vale 6), pero $f(3) = 0 \neq 6$. Por tanto, la discontinuidad es evitable: la gráfica es la recta $y = x + 3$ con un hueco en $(3, 6)$ y un punto aislado en $(3, 0)$.
c. Para que sea continua, el valor en el punto debe coincidir con el límite: hay que definir $f(3) = 6$.

Solución del ejercicio 5 (6 puntos)

a. $x = 20$ pertenece al primer tramo: $P(20) = 5 + 0{,}5 \cdot 20 = 15$ €. (1 punto)
b. El límite por la derecha es $c + 0{,}3 \cdot 20 = c + 6$. Para que no haya salto debe valer 15: $c + 6 = 15$, luego $c = 9$. (2 puntos)
c. 30 horas están en el segundo tramo: $P(30) = 9 + 0{,}3 \cdot 30 = 18$ €. (1 punto)
d. $\dfrac{P(x)}{x} = \dfrac{9 + 0{,}3x}{x} = \dfrac{9}{x} + 0{,}3 \to 0{,}3$: para estancias muy largas el precio medio por hora se acerca a 0,30 €. (1,5 puntos)
e. Para 10 h, $P(10) = 10$ €, es decir, 1 € por hora de media. Para estancias largas se acerca a 0,30 € por hora: es mucho más barato, por hora, quedarse más tiempo. (0,5 puntos)