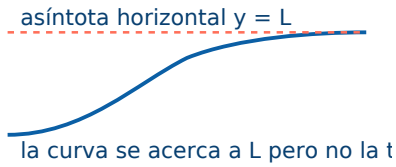
Apuntes - Límites y continuidad

Curso: 2 Bachillerato Ccss

Los límites describen hacia dónde tiende una función, y la continuidad dice si su gráfica se puede dibujar sin levantar el lápiz. Aquí calcularás límites con indeterminaciones, hallarás asíntotas y estudiarás funciones a trozos.

Actividad de introducción: acercarse sin llegar

Una empresa de reparto estima que el coste medio por paquete baja cuanto más paquetes reparte, porque el coste fijo se reparte entre muchos. Si el coste fijo es de 500 € y cada paquete cuesta 2 €, el coste medio es $\frac{500+2x}{x}$. Con 10 paquetes son 52 € por paquete, con 100 son 7 € y con 1 000 son 2,50 €. Los valores se acercan cada vez más a 2 €, pero nunca llegan a valer exactamente 2 €. Esa idea de «acercarse tanto como se quiera sin tocar» es el límite. Con los límites se estudia lo que ocurre en el infinito, cerca de un punto problemático y si una función se puede dibujar sin levantar el lápiz, que es lo que significa ser continua. Es la base para entender derivadas e integrales y un bloque seguro de la prueba de acceso.



Idea de límite

Definición: límite

El **límite** de f cuando x tiende a a, $\lim_{x\to a} f(x) = L$, es el valor al que se acercan las imágenes $f(x)$ cuando x se aproxima a a. Se estudian los **límites laterales** $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$: el límite existe solo si coinciden.

Observación

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ indica el comportamiento a largo plazo, por ejemplo hacia dónde tiende el coste medio cuando se fabrican cada vez más unidades.

Cálculo de límites e indeterminaciones

Regla: sustituir primero

En polinomios, racionales, raíces y exponenciales se sustituye x por a; si la función está definida, ese valor es el límite. Si sale $\frac{k}{0}$ con $k \neq 0$, el límite es $\pm\infty$ y hay que

mirar los laterales para el signo.

Regla: indeterminaciones

$\frac{0}{0}$: se factoriza y se simplifica (o se multiplica por el conjugado si hay raíces). $\frac{\infty}{\infty}$ con $x \to \infty$: se comparan grados (menor: 0; iguales: cociente de coeficientes principales; mayor: $\pm\infty$). $\infty - \infty$: se opera hasta obtener un cociente.

Método: resolver un límite

1. Sustituye el valor de x.
2. Si sale una indeterminación, identifica su tipo.
3. Factoriza, compara grados, multiplica por el conjugado u opera.
4. Simplifica y vuelve a sustituir.

Ejemplo 1

Calcula $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$.

Sale $0/0$. $\frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x + 3 \to 6$.

Ejemplo 2

Calcula $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 + 2x}{x^2 - 5}$.

Mismo grado: el límite es el cociente de coeficientes principales, $3/1 = 3$.

Ejemplo 3

Calcula $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{x - 1} - x \right)$.

Es $\infty - \infty$. $\frac{x^2 - x(x-1)}{x-1} = \frac{x}{x-1} \to 1$.

¡Atención!

No es cierto que $\frac{k}{0} = 0$ ni que $\frac{0}{0} = 1$. Tampoco se simplifican términos que no son factores: $\frac{x^2+9}{x+3}$ no se simplifica.

Asíntotas

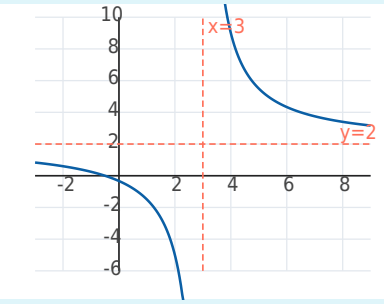
Definición: asíntotas

Vertical $x = a$: $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ (en una racional, donde se anula el denominador y no el numerador). **Horizontal** $y = L$: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L$. **Oblicua** $y = mx + n$: ocurre en una racional cuando el grado del numerador supera en 1 al del denominador; se halla dividiendo.

Ejemplo 4

Halla las asíntotas de $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$**.**

Vertical: $x = 3$ (el numerador vale 7). Horizontal: $\lim_{x \to \infty} f(x) = 2$, luego $y = 2$. No hay oblicua.



Ejemplo 5

Halla las asíntotas de $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$**.**

Vertical: $x = 1$. Horizontal: no hay. Oblicua: $\dfrac{x^2+1}{x-1} = x + 1 + \dfrac{2}{x-1}$, luego $y = x + 1$.

Continuidad

Definición: continuidad en un punto

f es **continua en** $x = a$ si existe $f(a)$, existe $\lim_{x \to a} f(x)$ y ambos coinciden. Los polinomios son continuos en $\mathbb{R}$; las racionales lo son salvo donde se anula el denominador.

Definición: tipos de discontinuidad

Evitable: el límite existe pero no coincide con $f(a)$ o $f(a)$ no existe. **De salto finito**: los límites laterales existen y son distintos. **De salto infinito** (asintótica): algún límite lateral es infinito.

Método: continuidad de una función a trozos

1. Calcula el límite por la izquierda del punto de unión.
2. Calcula el límite por la derecha.
3. Calcula el valor de la función en el punto.
4. Iguala los tres números y despeja el parámetro.

Ejemplo 6

Halla k para que *f(x)=\begin{cases}x^2+k&x* sea continua en $x=1$.

Izquierda: $1+k$. Derecha y valor: $3-1=2$. Igualando, $k=1$.

Ejemplo 7

Estudia *f(x)=\begin{cases}x+2&x* en $x=1$.

Izquierda: 3. Derecha: $5-2=3$. $f(1)=3$. Los tres valores coinciden: f es continua en $x=1$.

Ejemplo 8

Estudia $\dfrac{x^2-4}{x-2}$ en $x=2$.

$f(2)$ no existe, pero $f(x)=x+2$ para $x\neq 2$ y el límite es 4: discontinuidad evitable (se evita definiendo $f(2)=4$).

Ejemplo 9

Calcula los límites laterales en $x=2$ de $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ y concluye.

Por la izquierda, $x-2$ es negativo y tiende a 0, luego $f\to-\infty$. Por la derecha, $x-2$ es positivo y pequeño, luego $f\to+\infty$. Los laterales son distintos e infinitos: no existe el límite y $x=2$ es una asíntota vertical (discontinuidad de salto infinito).

Ejemplo 10

Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$.

Sale $0/0$. Se multiplica por el conjugado $\sqrt{x+4}+2$:

$$\frac{(x+4)-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}\to\frac{1}{4}.$$

Ejemplo 11

El coste medio de producir x unidades es $\bar{C}(x) = \dfrac{500 + 20x}{x}$. Calcula su límite en el infinito e interpreta.

$\bar{C}(x) = \dfrac{500}{x} + 20 \to 20$. A medida que se fabrican más unidades, el coste medio se acerca a 20 € por unidad, porque los costes fijos se reparten entre muchas unidades.

Observación

Un límite en el infinito modela situaciones de largo plazo: con $C(x) = 1000 + 8x$, el coste medio $\frac{1000}{x} + 8$ tiende a 8 € por unidad. En la PAU de Ciencias Sociales aparece casi siempre una función a trozos con un parámetro para que sea continua, límites con indeterminaciones y asíntotas.

Estrategia para calcular un límite

Método: ante cualquier límite

1. Sustituye el valor al que tiende x. Si sale un número, ese es el límite.
2. Si sale $\dfrac{k}{0}$ con $k \neq 0$, estudia los límites laterales: el resultado es $+\infty$ o $-\infty$ (o no existe si los signos difieren).
3. Si sale $\dfrac{0}{0}$, factoriza numerador y denominador y simplifica, o multiplica por el conjugado si hay raíces.
4. Si sale $\dfrac{\infty}{\infty}$, divide por la mayor potencia o compara los grados.
5. Si sale $\infty - \infty$, opera: común denominador o conjugado.

Ejemplo 12

Calcula $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$.

Al sustituir, el numerador vale $4 - 10 + 6 = 0$ y el denominador 0: indeterminación $\dfrac{0}{0}$.

Factorizamos el numerador: $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$. Simplificamos: $\dfrac{(x + 2)(x + 3)}{x + 2} = x + 3$, que vale 1 en $x = -2$. El límite es 1.

Continuidad y su relación con la gráfica

Propiedad: operaciones con funciones continuas

Los polinomios, las exponenciales y los logaritmos (en su dominio) son funciones continuas. La suma, la resta, el producto y la composición de funciones continuas son continuas, y el cociente también lo es salvo donde el denominador se anula. Por eso las funciones racionales solo pueden fallar en los ceros del denominador, y las funciones definidas a trozos solo en los puntos donde se cambia de fórmula.

Ejemplo 13

Estudia la continuidad de $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$ y clasifica sus discontinuidades.

El denominador se anula en $x = 1$ y $x = -1$, que no están en el dominio. En $x = -1$: $\dfrac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{1}{x-1} \to -\dfrac{1}{2}$, límite finito: discontinuidad evitable. En $x = 1$: $\dfrac{1}{x-1} \to \pm\infty$ según el lado: discontinuidad de salto infinito, con asíntota vertical $x = 1$. La función es continua en el resto de $\mathbb{R}$.

Observación: lectura de la gráfica

Una función continua se dibuja de un trazo, sin levantar el lápiz. Una discontinuidad evitable es un «agujero» (falta un punto o está mal colocado), un salto finito es un escalón y un salto infinito corresponde a una asíntota vertical. En problemas de contexto, un salto aparece cuando una tarifa cambia de golpe al superar un umbral, y los enunciados suelen pedir ajustar un parámetro para que no haya saltos. Las asíntotas horizontales indican el valor al que se estabiliza una magnitud con el tiempo, como la concentración de un fármaco o el coste medio al producir muchas unidades.

Límites y contexto: qué significan los resultados

Observación: interpretar un límite en un problema

En un enunciado de economía o de ciencias sociales, el límite en el infinito responde a la pregunta «¿qué pasa a largo plazo?». Si el coste medio por unidad tiende a 2 €, eso significa que, cuando se fabrica una cantidad enorme, el coste fijo apenas influye y cada unidad cuesta casi lo mismo que su coste variable. Si la población de usuarios de una aplicación tiende a 1 000, esa cifra es la capacidad máxima del mercado. Un límite que tiende a infinito cerca de un punto indica un valor prohibido o poco realista del modelo, como dividir un coste entre cero unidades.

Ejemplo 14

Una cooperativa vende miel a un precio medio por tarro $p(n) = \dfrac{4n+60}{n}$

euros, donde n es el número de tarros del pedido. ¿Qué precio medio se espera en pedidos muy grandes?

Calculamos $\lim_{n\to\infty} \frac{4n+60}{n} = 4$ porque numerador y denominador tienen el mismo grado y el cociente de coeficientes principales es $\frac{4}{1} = 4$. En pedidos muy grandes el precio medio se acerca a 4 € por tarro, y la parte $\frac{60}{n}$ (los gastos de envío repartidos) se hace despreciable.

Regla: límites de funciones elementales

Recuerda estos límites básicos para la prueba de acceso: $\lim_{x\to\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, $\lim_{x\to\infty} \ln x = +\infty$, $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ y $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$. Con ellos, una exponencial decreciente como $e^{-0{,}5t}$ tiende a cero y produce asíntotas horizontales en las funciones de crecimiento limitado.

¡Atención!

Para que una función sea continua en un punto no basta con que exista el límite: además la función debe estar definida allí y el valor debe coincidir con el límite. Por otra parte, cuando hay raíces o cocientes, no simplifiques sin factorizar: $\frac{x^2-9}{x-3} = x+3$ solo si $x \neq 3$, y esa precisión explica por qué hay un agujero y no un valor en $x = 3$.

¿Sabías que?

Durante siglos los matemáticos usaron el infinito y lo infinitamente pequeño con cierto recelo. La definición rigurosa de límite con «épsilon y delta» la dio Augustin-Louis Cauchy a comienzos del siglo XIX, y gracias a ella el cálculo diferencial quedó sobre bases sólidas. El número e se puede definir justamente como el límite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ cuando n crece sin límite, una fórmula que surgió al estudiar el interés compuesto.

El consejo de Otto

En cualquier límite, sustituye primero. Si sale una indeterminación, pregunta: ¿puedo factorizar?, ¿comparo grados?, ¿multiplico por el conjugado? En funciones a trozos calcula siempre tres números: límite izquierdo, límite derecho y valor de la función.