Ejercicios - Límites y continuidad

Curso: 2 Bachillerato Ccss · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Límites por sustitución

Calcula cada límite sustituyendo directamente cuando el resultado es un número.

a. $\lim_{x\to 2}(x^2-3x+1)$

b. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{x+1}$

c. $\lim_{x\to 4}\sqrt{x+5}$

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Límites laterales

Sea *f(x)=\begin{cases}2x+1&\text{si }x*

a. Calcula $\lim_{x\to 1^-} f(x)$.

b. Calcula $\lim_{x\to 1^+} f(x)$.

c. ¿Existe $\lim_{x\to 1} f(x)$? ¿Es f continua en $x=1$?

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Indeterminación cero entre cero

Resuelve las indeterminaciones $\dfrac{0}{0}$ factorizando o multiplicando por el conjugado.

a. $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$

b. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$

c. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Límites en el infinito de racionales

Calcula comparando los grados del numerador y del denominador.

a. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+1}{x^2-5}$
b. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x+1}{x^2+1}$
c. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3-2x}{5x^2+1}$

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Indeterminación infinito menos infinito

Calcula $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$.

a. Identifica el tipo de indeterminación.
b. Multiplica y divide por el conjugado.
c. Calcula el límite.

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Asíntotas de una función racional

Estudia las asíntotas de $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$.

a. Halla el dominio.
b. Calcula los límites laterales en $x=3$ y escribe la asíntota vertical.
c. Calcula $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y escribe la asíntota horizontal.

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – Asíntota oblicua

Considera $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$.

a. Halla la asíntota vertical.
b. Comprueba que no hay asíntota horizontal.
c. Calcula la asíntota oblicua $y=mx+n$ con $m=\lim \dfrac{f(x)}{x}$ y $n=\lim\left(f(x)-mx\right)$.

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – Discontinuidad evitable

Sea 

a. Calcula $\lim_{x \to 2} f(x)$.
b. Halla k para que f sea continua en $x = 2$.
c. ¿Qué tipo de discontinuidad tendría si $k = 0$?

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – Continuidad con un parámetro

Se define *f(x)=\begin{cases}3x-a&\text{si }x*

a. Calcula los límites laterales en $x = 2$ en función de a.
b. Halla a para que f sea continua en $x = 2$.
c. Con ese valor, calcula $f(0)$ y $f(3)$.

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – Tipos de discontinuidad

Clasifica la discontinuidad en $x = 0$ de cada función.

a. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ $(x \neq 0)$ con $f(0) = 2$ (recuerda que $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$).
b. *g(x)=\begin{cases}x+1&x*
c. $h(x) = \dfrac{1}{x}$

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – La tarifa del taxi

En una ciudad la tarifa de un taxi, en euros, para un trayecto de x km es $T(x) = 3 + 1{,}2x$ si $0 \leq x \leq 5$, y $T(x) = a + 0{,}9x$ si $x > 5$. La empresa quiere que la tarifa no tenga saltos en $x = 5$.

a. Calcula $T(5)$.
b. Calcula $\lim_{x \to 5^+} T(x)$ en función de a.
c. Halla a para que T sea continua en $x = 5$.
d. Calcula el precio de un trayecto de 10 km.

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – Concentración que se estabiliza

La concentración de un nutriente en un cultivo (en mg/l) a las t horas es $c(t) = \dfrac{5t}{t+2}$, $t \geq 0$.

a. Calcula $c(0)$ y $c(2)$.
b. Calcula $\lim_{t\to\infty} c(t)$ e interprétalo.
c. ¿En qué instante alcanza 4 mg/l?
d. Escribe la asíntota horizontal de la gráfica.

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – El coste medio y la producción

Una imprenta de Pamplona tiene un coste fijo de 500 € al día y un coste de 2 € por ejemplar. El coste medio por ejemplar al imprimir x ejemplares es .

a. Calcula el coste medio al imprimir 100 ejemplares.
b. Calcula e interprétalo.
c. ¿Cuántos ejemplares hacen falta para que el coste medio baje a 3 €?
d. Calcula e interprétalo.

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – Crecimiento limitado de una población

El número de usuarios de una aplicación, en un pueblo de 1 000 habitantes, crece según $P(t) = \dfrac{1\,000}{1 + 4e^{-0{,}5t}}$, con t en meses.

a. Calcula $P(0)$.
b. Calcula $P(4)$ con una cifra decimal.
c. Calcula $\lim_{t\to\infty} P(t)$ e interprétalo.
d. ¿Tiene sentido que P sea continua? Explica.

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – Problema: la factura de la luz por tramos

Una compañía eléctrica cobra, por un consumo de x kWh al mes, $F(x) = 0{,}15x$ euros si $0 \leq x \leq 100$; $F(x) = 0{,}20x + a$ si 100; y $F(x) = 0{,}30x + b$ si $x > 300$. La compañía pretende que F sea continua para evitar saltos en la factura.

a. Calcula $F(100)$ con el primer tramo.
b. Halla a imponiendo continuidad en $x = 100$.
c. Calcula $F(300)$ con el segundo tramo y halla b para que haya continuidad en $x = 300$.
d. Calcula la factura de 450 kWh.
e. ¿Es razonable que la tarifa sea continua? Razona.

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – Problema: los tramos de un impuesto

En un país ficticio el impuesto $I(x)$, en euros, que paga una persona con ingresos anuales x euros es: $I(x) = 0{,}1x$ si $0 \le x \le 12\,000$; $I(x) = 0{,}2x - a$ si $12\,000$; y $I(x) = 0{,}3x - b$ si $x > 30\,000$. El legislador desea que I sea continua en toda la recta.

a. Calcula $I(12\,000)$.
b. Determina a.
c. Calcula $I(30\,000)$ y determina b.
d. Calcula el impuesto de una persona que gana 50 000 €.
e. Calcula el tipo medio $\dfrac{I(x)}{x}$ para $x = 50\,000$ y compáralo con el tipo marginal del último tramo.

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – Problema: una función con asíntotas dadas

Sea $f(x) = \dfrac{ax + 1}{x - 2}$ donde a es un parámetro. Se sabe que la gráfica de f tiene como asíntota horizontal la recta $y = 3$. Esta función modela el precio medio, en euros, de un pedido en función de la distancia x (en decenas de km), con $x > 2$.

a. Indica el dominio y la asíntota vertical de f.
b. Calcula $\lim_{x \to \infty} f(x)$ en función de a.
c. Halla a.
d. Con ese valor, calcula los puntos de corte con los ejes.
e. Interpreta la asíntota horizontal.

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Problema: un límite con parámetro

Se considera el límite $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + kx - 6}{x - 2}$.

a. Explica por qué el numerador debe anularse en $x = 2$ para que el límite sea finito.
b. Calcula k.

c. Factoriza el numerador con ese valor de k.
d. Calcula el valor del límite.
e. Comprueba el resultado dando valores cercanos a 2.

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Problema: la estación de bicicletas compartidas

El número medio de usuarios por hora de una estación de bicicletas compartidas de Valencia, en función del número x de bicicletas disponibles ($x > 1$), se modela con $f(x) = \dfrac{3x+2}{x-1}$.

a. Calcula el dominio y los puntos de corte con los ejes.
b. Calcula $f(2)$, $f(5)$ y $f(11)$.
c. Calcula las asíntotas.
d. Interpreta la asíntota horizontal en el contexto.
e. ¿Qué ocurre cuando $x \to 1^+$? ¿Tiene sentido?

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: límites y continuidad

Resuelve estos retos.

a. Calcula $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$.
b. Halla k para que  sea continua en $\mathbb{R}$.
c. Calcula $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.
d. Escribe una función racional con asíntota vertical $x = -1$ y horizontal $y = 2$.