Soluciones - Límites y continuidad

Curso: 2 Bachillerato Ccss

Solución del ejercicio 1

a. Los polinomios son continuos en todo $\mathbb{R}$, así que el límite es el valor de la función: $\lim_{x\to 2}(x^2-3x+1) = 4-6+1 = -1$.

b. La función racional es continua en $x=1$ porque el denominador no se anula (vale 2). Sustituimos: $\dfrac{1+1}{1+1} = \dfrac{2}{2} = 1$.

c. La raíz es continua donde el radicando es positivo, y en $x=4$ vale 9. Por tanto, $\lim_{x\to 4}\sqrt{x+5} = \sqrt{4+5} = \sqrt{9} = 3$. En los tres casos basta sustituir porque no aparece ninguna indeterminación.

Solución del ejercicio 2

a. Para valores menores que 1 la función vale $2x+1$. Al acercarnos a 1 por la izquierda: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2\cdot 1 + 1 = 3$.

b. Para valores mayores que 1 se usa x^2+2: $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1+2 = 3$.

c. Los dos límites laterales existen y coinciden, así que $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$. Además, como 1 pertenece al segundo tramo, $f(1) = 1^2+2 = 3$. El límite coincide con el valor de la función, luego f es continua en $x=1$: la gráfica no tiene ningún salto en ese punto.

Solución del ejercicio 3

a. Al sustituir sale $\frac{0}{0}$. Factorizamos la diferencia de cuadrados y simplificamos: $\dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3$, que tiende a $3+3=6$.

b. También sale $\frac{0}{0}$, luego $x=2$ es raíz del numerador: $x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$. Simplificando, el límite es el de $x-3$, que vale $2-3=-1$.

c. Con raíces multiplicamos y dividimos por el conjugado $\sqrt{x+1}+1$: $\dfrac{(x+1)-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \dfrac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1} \to \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$.

Solución del ejercicio 4

a. Numerador y denominador tienen el mismo grado, 2. Dividiendo ambos entre x^2, los términos de menor grado tienden a 0 y queda el cociente de los coeficientes principales: $\frac{3}{1} = 3$.
b. El grado del numerador (1) es menor que el del denominador (2): el denominador crece mucho más deprisa y el cociente tiende a 0.
c. El grado del numerador (3) es mayor que el del denominador (2): el cociente se comporta como $\frac{x^3}{5x^2} = \frac{x}{5}$, que tiende a $+\infty$, porque los coeficientes principales son positivos.

Solución del ejercicio 5

a. Cuando $x \to \infty$, $\sqrt{x^2+x}$ tiende a ∞ y x también, así que al sustituir queda la indeterminación $\infty - \infty$.
b. Multiplicamos y dividimos por el conjugado $\sqrt{x^2+x}+x$; en el numerador aparece una diferencia de cuadrados:
$$\frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}.$$
c. Ahora la indeterminación es $\frac{\infty}{\infty}$. Dividimos numerador y denominador entre x:
$\frac{1}{\sqrt{1+1/x}+1} \to \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$. El límite vale $\frac{1}{2}$.

Solución del ejercicio 6

a. Una función racional no está definida donde se anula el denominador: $x-3=0$ en $x=3$. Por tanto, $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.
b. En $x=3$ el numerador vale $7>0$ y el denominador tiende a 0. Por la derecha el denominador es positivo: $\lim_{x\to 3^+} f = +\infty$; por la izquierda es negativo: $\lim_{x\to 3^-} f = -\infty$. La recta $x=3$ es asíntota vertical.
c. Numerador y denominador tienen el mismo grado, así que el límite es el cociente de coeficientes principales: $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x-3} = 2$. La recta $y=2$ es asíntota horizontal.

Solución del ejercicio 7

a. El denominador se anula en $x=1$ y el numerador vale $1+1=2\neq 0$, así que la

función tiende a infinito: asíntota vertical $x = 1$.

b. El grado del numerador (2) es mayor que el del denominador (1), luego $\lim_{x\to\infty} f = \infty$ y no hay asíntota horizontal. Como la diferencia de grados es exactamente 1, hay asíntota oblicua.

c. $m = \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim \dfrac{x^2+1}{x^2-x} = 1$ y
$n = \lim \left(\dfrac{x^2+1}{x-1} - x \right) = \lim \dfrac{x^2+1-x^2+x}{x-1} = \lim \dfrac{x+1}{x-1} = 1$. La asíntota oblicua es $y = x + 1$.

Solución del ejercicio 8

a. Para $x \neq 2$ sale $\frac{0}{0}$ al sustituir; factorizamos y simplificamos: $\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2$. Por tanto, $\lim_{x\to 2} f(x) = 2 + 2 = 4$.

b. Una función es continua en un punto si el límite existe y coincide con el valor de la función. Debe cumplirse $f(2) = \lim_{x\to 2} f(x)$, es decir, $k = 4$.

c. Con $k = 0$, el límite existe (vale 4) pero no coincide con $f(2) = 0$. Es una discontinuidad evitable: bastaría redefinir el valor en $x = 2$ para eliminarla. En la gráfica se ve una recta con un «agujero» en $(2, 4)$ y un punto aislado en $(2, 0)$.

Solución del ejercicio 9

a. Por la izquierda se usa el primer tramo: $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3 \cdot 2 - a = 6 - a$. Por la derecha, el segundo: $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2^2 + 1 = 5$, que coincide con $f(2)$.

b. Para que f sea continua en $x = 2$, los dos límites laterales deben ser iguales entre sí y al valor de la función: $6 - a = 5$, luego $a = 1$.

c. Con $a = 1$ la función es $3x - 1$ para $x < 2$ y $x^2 + 1$ para $x \geq 2$. Así $f(0) = 3 \cdot 0 - 1 = -1$ (primer tramo) y $f(3) = 3^2 + 1 = 10$ (segundo tramo).

Solución del ejercicio 10

a. El límite vale 1 y $f(0) = 2$: discontinuidad evitable (bastaría definir $f(0) = 1$).

b. Límites laterales: 1 por la izquierda y 3 por la derecha. Son finitos y distintos: discontinuidad de salto finito (salto de 2).

c. $\lim_{x\to 0^+} h = +\infty$ y $\lim_{x\to 0^-} h = -\infty$: discontinuidad de salto infinito (asíntota vertical).

Solución del ejercicio 11

a. $x = 5$ pertenece al primer tramo: $T(5) = 3 + 1{,}2 \cdot 5 = 3 + 6 = 9$ €.

b. Por la derecha de 5 se usa el segundo tramo: $\lim_{x \to 5^+} T(x) = a + 0{,}9 \cdot 5 = a + 4{,}5$.

c. Para que no haya salto, el límite por la derecha debe coincidir con $T(5)$ (el límite por la izquierda ya vale 9): $a + 4{,}5 = 9$, luego $a = 4{,}5$.

d. Un trayecto de 10 km está en el segundo tramo: $T(10) = 4{,}5 + 0{,}9 \cdot 10 = 13{,}50$ €. A partir de 5 km cada kilómetro cuesta menos (0,90 € en lugar de 1,20 €).

Solución del ejercicio 12

a. Sustituimos: $c(0) = \dfrac{0}{2} = 0$ mg/l al principio y $c(2) = \dfrac{10}{4} = 2{,}5$ mg/l a las dos horas.

b. Numerador y denominador tienen grado 1, así que el límite es el cociente de coeficientes principales: $\lim_{t \to \infty} \dfrac{5t}{t+2} = 5$. La concentración tiende a estabilizarse en 5 mg/l; como $5t < 5(t+2)$, nunca llega a superarlo.

c. Resolvemos $\dfrac{5t}{t+2} = 4$: $5t = 4t + 8$, luego $t = 8$ horas.

d. Como el límite en el infinito es 5, la asíntota horizontal es $y = 5$.

Solución del ejercicio 13

a. € por ejemplar.

b. $\lim_{x \to \infty} \left(\dfrac{500}{x} + 2 \right) = 2$: el coste medio se acerca a 2 € (el coste variable) al repartir el coste fijo entre muchos ejemplares.

c. $\dfrac{500 + 2x}{x} = 3$ da $500 = x$: 500 ejemplares.

d. : con muy pocos ejemplares el coste fijo se reparte entre casi nadie y el coste medio se dispara.

Solución del ejercicio 14

a. $P(0) = \dfrac{1\,000}{1 + 4} = 200$ usuarios.

b. $P(4) = \dfrac{1\,000}{1 + 4e^{-2}} = \dfrac{1\,000}{1{,}5413} \approx 648{,}9$ usuarios (unos 649).

c. $e^{-0{,}5t} \to 0$, luego $P \to 1\,000$: la aplicación llega, como máximo, a toda la población.

d. Es un modelo continuo que aproxima un recuento en números enteros; tiene sentido para analizar tendencias, aunque en la realidad los usuarios sean enteros.

Solución del ejercicio 15

a. $F(100) = 0{,}15 \cdot 100 = 15$ €.
b. $0{,}20 \cdot 100 + a = 15$ da $a = -5$.
c. $F(300) = 0{,}20 \cdot 300 - 5 = 55$ €. Imponemos $0{,}30 \cdot 300 + b = 55$, luego $b = -35$.
d. $F(450) = 0{,}30 \cdot 450 - 35 = 100$ €.
e. Sí: una función continua evita que consumir un kWh más haga subir la factura de golpe, y los incrementos son proporcionales a lo consumido.

Solución del ejercicio 16

a. $I(12\,000) = 0{,}1 \cdot 12\,000 = 1\,200$ €.
b. $0{,}2 \cdot 12\,000 - a = 1\,200$, luego $a = 1\,200$.
c. $I(30\,000) = 0{,}2 \cdot 30\,000 - 1\,200 = 4\,800$. Entonces $0{,}3 \cdot 30\,000 - b = 4\,800$ y $b = 4\,200$.
d. $I(50\,000) = 0{,}3 \cdot 50\,000 - 4\,200 = 10\,800$ €.
e. Tipo medio: $\dfrac{10\,800}{50\,000} = 0{,}216$, el 21,6 %. Es menor que el tipo marginal del 30 % porque los primeros euros tributan menos.

Solución del ejercicio 17

a. El denominador se anula en $x = 2$: $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ y la asíntota vertical es $x = 2$ (el numerador no se anula ahí salvo que $2a + 1 = 0$).
b. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{ax + 1}{x - 2} = a$.
c. Como la asíntota es $y = 3$, $a = 3$.
d. Con el eje Y: $f(0) = \dfrac{1}{-2} = -\dfrac{1}{2}$. Con el eje X: $3x + 1 = 0$, $x = -\dfrac{1}{3}$.
e. Para distancias grandes el precio medio se estabiliza cerca de 3 €, sin superarlo.

Solución del ejercicio 18

a. Si el numerador no se anula, el límite sería $\dfrac{\text{número}}{0}$, que es infinito (o no existe).
b. $4 + 2k - 6 = 0$ da $k = 1$.
c. $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$.

d. $\lim_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+3)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+3)=5$.
e. Para $x=1{,}99$: $x+3=4{,}99$; para $x=2{,}01$: $5{,}01$. Los valores se acercan a 5.

Solución del ejercicio 19

a. $\mathrm{Dom} f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Eje Y: $f(0)=-2$. Eje X: $3x+2=0$, $x=-\dfrac{2}{3}$.
b. $f(2)=8$, $f(5)=\dfrac{17}{4}=4{,}25$, $f(11)=\dfrac{35}{10}=3{,}5$.
c. Vertical $x=1$; horizontal $y=3$ (el cociente de coeficientes principales).
d. Al aumentar mucho el número de bicicletas, la media de usuarios por hora se aproxima a 3 sin llegar a ella.
e. $f\to+\infty$: el modelo no es válido cerca de $x=1$ (no se puede usar con una sola bicicleta); solo es aplicable para valores moderados de x.

Solución del ejercicio 20

a. Sale $\frac{0}{0}$, así que $x=1$ es raíz de ambos polinomios. Factorizamos:
$\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{x+1}{x-2}\to\dfrac{2}{-1}=-2$.
b. Para $x\neq 1$, $\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1$, cuyo límite en $x=1$ es 2. En el resto de puntos la función ya es continua, así que basta tomar $k=2$.
c. Es una indeterminación 1^∞ y su valor es, por definición, el número e: el límite vale $e\approx 2{,}718$.
d. Por ejemplo, $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$: el denominador se anula en $x=-1$ (asíntota vertical) y, como los grados son iguales, $\lim_{x\to\infty} f=\dfrac{2}{1}=2$ (asíntota horizontal $y=2$).