Soluciones del examen - Integrales

Curso: 2 Bachillerato Ccss · Duración: 90 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (4 puntos)

a. Integramos término a término con la regla de la potencia: $\int 6x^2 dx = 2x^3$, $\int 2x\,dx = x^2$ y $\int 1\,dx = x$. La familia de primitivas es $F(x) = 2x^3 - x^2 + x + C$; una primitiva concreta (con $C = 0$) es $2x^3 - x^2 + x$. Comprobación: al derivar $2x^3 - x^2 + x$ se recupera $6x^2 - 2x + 1$. (1 punto)

b. Por la regla de Barrow: $\left[2x^3 - x^2 + x\right]_0^2 = (16 - 4 + 2) - 0 = 14$. El resultado positivo encaja con que $f(x) > 0$ en todo $[0, 2]$, ya que su discriminante, $4 - 24$, es negativo. (1,5 puntos)

c. Imponemos la condición: $F(1) = 2 - 1 + 1 + C = 2 + C = 5$, luego $C = 3$. La primitiva pedida es $F(x) = 2x^3 - x^2 + x + 3$. Comprobación: $F(1) = 2 - 1 + 1 + 3 = 5$, como se pedía. (1,5 puntos)

Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

a. Los cortes con el eje X cumplen $y = 0$: $3x - x^2 = x(3 - x) = 0$, con $x = 0$ y $x = 3$. Los puntos son $(0, 0)$ y $(3, 0)$.

b. Entre 0 y 3 la parábola está por encima del eje (por ejemplo, en $x = 1$ vale 2), así que el área es la integral definida:

$$A = \int_0^3 (3x - x^2)\,dx = \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{27}{2} - 9 = \frac{9}{2}\ \text{u}^2,$$

es decir, 4,5 unidades cuadradas. Se puede comprobar con la regla de Arquímedes: el área es $\frac{2}{3}$ del rectángulo de base 3 y altura máxima $\frac{9}{4}$, es decir, $\frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{2}$. (3 puntos)

Solución del ejercicio 3 (3 puntos)

a. Igualamos: $x^2 = x + 2$, es decir, $x^2 - x - 2 = 0$, cuyas soluciones son $x = -1$ y $x = 2$. Los puntos de corte son $(-1, 1)$ y $(2, 4)$. Para obtener las ordenadas se sustituye en cualquiera de las dos funciones: $g(-1) = 1$ y $g(2) = 4$.

b. En $x = 0$, $g(0) = 2$ y $f(0) = 0$, así que entre los cortes $g \geq f$. El área es la integral de $g - f$: $A = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{10}{3} - \left(-\frac{7}{6}\right) = \frac{9}{2}\ \text{u}^2$.

Detalle de Barrow: en $x = 2$ la primitiva vale $2 + 4 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$ y en $x = -1$ vale $\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} = -\frac{7}{6}$. Si se integrara $f - g$ saldría $-\frac{9}{2}$, y el área se tomaría en valor absoluto. (2 puntos)

Solución del ejercicio 4 (3 puntos)

a. El coste de producir es la integral del coste marginal. Una primitiva de $0{,}2x + 10$ es $0{,}1x^2 + 10x$: $\int_0^{50} (0{,}2x + 10)\,dx = \left[0{,}1x^2 + 10x\right]_0^{50} = 250 + 500 = 750$ €. Los primeros 5 000 huevos cuestan 750 €. El término $0{,}1x^2$ aporta 250 € y el término $10x$, 500 €. (1,5 puntos)

b. El coste adicional es la integral entre 50 y 100: $\left[0{,}1x^2 + 10x\right]_{50}^{100} = (1\,000 + 1\,000) - 750 = 1\,250$ €. La segunda tanda cuesta más que la primera porque el coste marginal aumenta con la producción. (1,5 puntos)

Solución del ejercicio 5 (6 puntos)

a. $80 - \dfrac{q^2}{5} = 44$ da $q^2 = 180$, $q_0 = \sqrt{180} \approx 13{,}4$ decenas, es decir, unas 134 gafas. (1 punto)

b. Ingreso $= 44 \cdot 134 = 5\,896$ € (con $q_0 = 13{,}4$ decenas, es decir, unas 134 gafas). (1 punto)

c. $\displaystyle\int_0^{13{,}4} \left(36 - \frac{q^2}{5}\right) dq = \left[36q - \frac{q^3}{15}\right]_0^{13{,}4} = 482{,}4 - 160{,}4 = 322$ (en decenas·euros), unos 3 220 €. (2 puntos)

d. Es la suma que los compradores habrían pagado de más si hubiera existido un precio distinto para cada uno. (1 punto)

e. A 40 €: $q_1 = \sqrt{200} = 14{,}14$ decenas, unas 141 gafas, y el ingreso sería $40 \cdot 141 = 5\,640$ €, que es menos que 5 896 €: bajar el precio reduciría el ingreso. (1 punto)