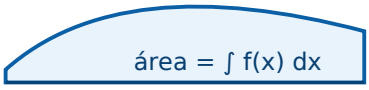
Apuntes - Integrales

Curso: 2 Bachillerato Ccss

La integral es la operación inversa de la derivada y sirve para calcular áreas y acumular cantidades: el coste total a partir del coste marginal, las ventas acumuladas a partir de la velocidad de ventas o el área limitada por curvas. Aprenderás primitivas, la regla de Barrow y el cálculo de áreas.

Actividad de introducción: llenar un depósito

Un depósito de agua se llena con un grifo cuyo caudal cambia con el tiempo: al principio sale con mucha fuerza y luego va decreciendo. Si el caudal fuera constante, el agua acumulada sería simplemente caudal por tiempo, es decir, el área de un rectángulo. Cuando el caudal varía, el agua acumulada es el área bajo la gráfica del caudal. Esa idea, sumar infinitas cantidades pequeñas, es el origen de la integral. La integral permite pasar de una tasa de variación (velocidad, coste marginal, caudal) a la cantidad total acumulada (distancia, coste, volumen). En este tema aprenderás a calcular primitivas, a evaluar integrales definidas con la regla de Barrow y a hallar áreas, que es lo que se pide en la prueba de acceso a la universidad.



Primitivas e integral indefinida

Definición: primitiva

Una **primitiva** de f es una función F tal que $F'(x) = f(x)$. Todas las primitivas se diferencian en una constante: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ es la **integral indefinida**.

Regla: tabla de integrales inmediatas

$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $(n \neq -1)$; $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$; $\int e^x\,dx = e^x + C$; $\int k\,dx = kx + C$. Con la raíz: $\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$.

Regla: linealidad y cambio lineal

$\int (f \pm g) = \int f \pm \int g$ y $\int kf = k\int f$. Si dentro hay una expresión lineal $ax + b$:

$$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C,\ \int e^{ax+b}dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + C,$$
$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$$

Ejemplo 1

Calcula $\int (3x^2 - 4x + 5)\,dx$.

Se integra término a término: $x^3 - 2x^2 + 5x + C$. Se comprueba derivando: $3x^2 - 4x + 5$.

Ejemplo 2

Calcula $\int (2x+1)^3 dx$ y $\int e^{3x} dx$.

Con cambio lineal: $\frac{(2x+1)^4}{2\cdot 4} + C = \frac{(2x+1)^4}{8} + C$. Y $\frac{e^{3x}}{3} + C$.

Ejemplo 3

Halla la primitiva de $f(x) = 6x - 2$ que cumple $F(1) = 3$.

$F(x) = 3x^2 - 2x + C$. $F(1) = 3 - 2 + C = 3 \Rightarrow C = 2$. Así $F(x) = 3x^2 - 2x + 2$.

¡Atención!

No olvides la constante C en la integral indefinida, y no uses la fórmula de las potencias para $\frac{1}{x}$: $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$, no $\frac{x^0}{0}$. Si dentro hay $ax+b$, divide por a.

Integral definida y regla de Barrow

Definición: integral definida

Si $f \geq 0$ en $[a,b]$, la **integral definida** $\int_a^b f(x)\,dx$ es el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$. Si $f \leq 0$, la integral es negativa y el área es su valor absoluto.

Teorema: regla de Barrow

Si F es una primitiva de f en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Propiedad: propiedades

$\int_a^a f = 0$; $\int_a^b f = -\int_b^a f$; $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$; $\int_a^b (kf) = k\int_a^b f$.

Ejemplo 4

Calcula $\int_0^2 (x^2+1)\,dx$**.**

$F(x) = \frac{x^3}{3} + x$. $F(2) - F(0) = \frac{8}{3} + 2 - 0 = \frac{14}{3}$.

Ejemplo 5

Calcula $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$ **y** $\int_0^1 e^{2x}dx$**.**

$[\ln x]_1^e = 1 - 0 = 1$. $\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 = \frac{e^2-1}{2}$.

Cálculo de áreas

Método: área entre una curva y el eje X

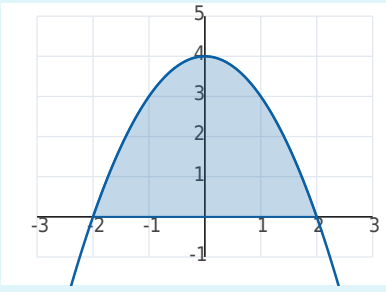
1. Halla los puntos de corte de f con el eje X dentro del intervalo.
2. Divide el intervalo en los tramos donde f no cambia de signo.
3. Calcula la integral en cada tramo y toma el valor absoluto.
4. Suma las áreas parciales y escribe las unidades (u²).

Ejemplo 6

Área limitada por $y = 4 - x^2$ **y el eje** X**.**

Cortes: $4 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$. En $[-2, 2]$, $f \geq 0$.

$$\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}\ \text{u}^2.$$



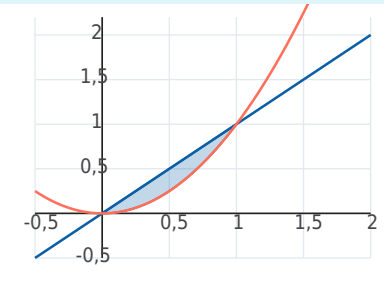
Método: área entre dos curvas

1. Iguala $f(x) = g(x)$ para hallar los límites de integración.
2. Decide cuál es la función de arriba en el intervalo (prueba un punto).
3. Calcula $\int_a^b (f - g)\,dx$ con f arriba.
4. Interpreta el resultado en u².

Ejemplo 7

Área entre $y = x$ e $y = x^2$.

$x = x^2 \Rightarrow x = 0, 1$. En $(0, 1)$, $x \geq x^2$. $\int_0^1 (x - x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ u².

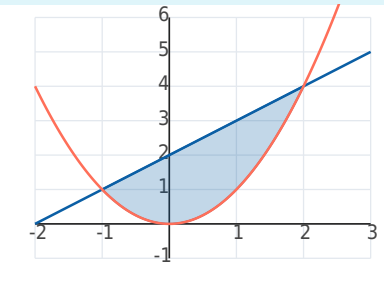


Ejemplo 8

Área entre $y = x + 2$ e $y = x^2$.

$x^2 = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1, 2$. La recta está por encima.

$\int_{-1}^2 (x + 2 - x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^2 = \frac{10}{3} - \left(-\frac{7}{6}\right) = \frac{9}{2}$ u².



¡Atención!

Si la función cambia de signo en el intervalo, $\int_a^b f$ resta áreas y no da el área total: hay que separar los tramos y usar valores absolutos. El área nunca puede ser negativa.

Aplicaciones económicas

Propiedad: acumulación

Si $C'(x)$ es el coste marginal, el coste de pasar de a a b unidades es $\int_a^b C'(x)\,dx = C(b) - C(a)$. Del mismo modo, si $v(t)$ es la velocidad de ventas, las ventas acumuladas entre t_1 y t_2 son $\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$.

Ejemplo 9

El coste marginal es $C'(x) = 2x + 10$ y los costes fijos son 100 €. Halla $C(x)$ y el coste de producir 20 unidades.

$C(x) = x^2 + 10x + K$ y $C(0) = 100 \Rightarrow K = 100$. $C(20) = 400 + 200 + 100 = 700$ €.

Ejemplo 10

La velocidad de ventas de un producto es $v(t) = 3t^2 + 2$ unidades por día. ¿Cuántas se venden entre $t = 0$ y $t = 4$?

Ventas acumuladas: $\int_0^4 (3t^2 + 2)dt = \left[t^3 + 2t\right]_0^4 = 64 + 8 = 72$ unidades.

Ejemplo 11

Halla el valor medio de $f(x) = 3x^2$ en $[0, 2]$.

El valor medio es $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 3x^2 dx = \frac{1}{2}\left[x^3\right]_0^2 = \frac{8}{2} = 4$.

Ejemplo 12

Calcula $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$.

$\sqrt{x} = x^{1/2}$ tiene primitiva $\frac{2}{3}x^{3/2}$. Entonces $\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^4 = \frac{2}{3}\cdot 8 - 0 = \dfrac{16}{3}$.

Observación

En la PAU de Ciencias Sociales se piden primitivas inmediatas, una integral definida con la regla de Barrow y el área entre una curva y el eje o entre dos curvas, a veces con una función exponencial o logarítmica sencilla. El dibujo del recinto ayuda a decidir cuál es la función de arriba.

El teorema fundamental y su significado

Propiedad: la integral de una tasa es la variación total

Si f es la tasa de variación de una magnitud, la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ es el cambio total de esa magnitud entre a y b. Con el coste marginal obtienes el coste adicional; con la velocidad, el espacio recorrido; con un caudal, el volumen acumulado; con las ventas diarias, las ventas totales de un periodo. Esta lectura es la que se pide en los problemas de contexto económico de la prueba de acceso.

Ejemplo 13

Un taller sabe que el coste marginal es $C'(x) = 6 + 0{,}02x$ euros por pieza. ¿Cuánto cuesta pasar de 50 a 150 piezas?

$\int_{50}^{150} (6 + 0{,}02x)\,dx = \left[6x + 0{,}01x^2\right]_{50}^{150} = (900 + 225) - (300 + 25) = 800$ €. Fabricar 100 piezas más cuesta 800 euros, que son 8 € por pieza como promedio.

Estrategia para plantear un área

Método: del enunciado al área

1. Dibuja un esbozo de las curvas y marca la región pedida.
2. Halla los puntos de corte entre las curvas (o con el eje X) resolviendo la ecuación.
3. Decide cuál función está por encima en cada tramo, probando un valor intermedio.
4. Escribe la integral de «la de arriba menos la de abajo» entre los cortes, partiéndola en varias si las posiciones se intercambian.
5. Calcula una primitiva, aplica Barrow y escribe el resultado con unidades de área.

Ejemplo 14

Calcula el área encerrada por $y = x^2$ y $y = x$.

Cortes: $x^2 = x$ da $x = 0$ y $x = 1$. En $x = 0{,}5$ la recta vale $0{,}5$ y la parábola $0{,}25$, así que la recta está por encima. Entonces $A = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ u^2.

Observación: integrales y signos

La integral definida es una cantidad con signo: lo que queda por debajo del eje X

cuenta como negativo. Por eso, para obtener un área hay que partir el intervalo en los ceros de la función y tomar el valor absoluto de cada trozo, o integrar «arriba menos abajo». En un contexto económico un resultado negativo no es un error, sino una pérdida o una disminución: por ejemplo, un beneficio marginal negativo indica que producir una unidad más reduce el beneficio total.

Ejemplo 15

La velocidad de un tren en un tramo recto es $v(t) = 2t$ m/s durante 10 s. ¿Qué distancia recorre y cuál es la velocidad media?

La distancia es $\int_0^{10} 2t\,dt = \left[t^2\right]_0^{10} = 100$ m. La velocidad media es el espacio entre el tiempo: $\dfrac{100}{10} = 10$ m/s, justo la mitad de la velocidad final de 20 m/s, como corresponde a un movimiento con velocidad creciente de forma lineal.

Más técnicas de cálculo para la prueba de acceso

Regla: integrales de la forma f(ax+b)

Cuando el argumento de una función de la tabla es lineal, $ax + b$, la primitiva se obtiene dividiendo entre a: $\int e^{ax+b}dx = \dfrac{1}{a}e^{ax+b} + C$, $\int \dfrac{1}{ax+b}dx = \dfrac{1}{a}\ln|ax+b| + C$ y $\int (ax+b)^n dx = \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C$ para $n \neq -1$. Es la versión sin esfuerzo de la regla de la cadena al revés y sirve para casi todas las integrales de contexto económico.

Ejemplo 16

Calcula $\int_0^2 \dfrac{6}{2x+1}\,dx$.

Sacamos el 6 fuera y dividimos entre el coeficiente 2 del argumento: $6 \cdot \dfrac{1}{2}\ln|2x+1| = 3\ln|2x+1|$. Aplicamos Barrow: $3\ln 5 - 3\ln 1 = 3\ln 5 \approx 4{,}83$. Fíjate en que no hace falta ningún cambio de variable explícito.

Observación: descomponer antes de integrar

Si el integrando es un cociente de polinomios con denominador de un solo término, conviene separarlo en sumandos y aplicar la regla de la potencia a cada uno. Por ejemplo, $\dfrac{x^2+3x}{x} = x + 3$ y $\dfrac{4x^3-2}{x^2} = 4x - 2x^{-2}$. En cambio, si el denominador es un binomio, suele convenir comprobar si la función es de la forma $\dfrac{k}{ax+b}$ o si el

numerador es la derivada del denominador, lo que da un logaritmo. En la prueba de acceso a la universidad de Ciencias Sociales aparecen sobre todo polinomios, exponenciales y logaritmos sencillos, por lo que dominar estos casos asegura la mayor parte de los puntos del bloque de análisis.

Ejemplo 17

Halla el área de la región limitada por $y = e^x$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = \ln 3$.

La función es positiva, así que $A = \int_0^{\ln 3} e^x \, dx = [e^x]_0^{\ln 3} = e^{\ln 3} - e^0 = 3 - 1 = 2$ u^2.

Recuerda que $e^{\ln a} = a$.

¡Atención!

Tres errores típicos: olvidar la constante C en la integral indefinida, olvidar dividir por el coeficiente de x cuando el argumento es lineal (por ejemplo, $\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C$ y no $e^{2x} + C$), y calcular $F(a) - F(b)$ en lugar de $F(b) - F(a)$. Comprueba siempre derivando la primitiva que has obtenido.

¿Sabías que?

La palabra «integral» fue introducida por Jacob Bernoulli a finales del siglo XVII, y el símbolo $\int$ es una «S» alargada, de «summa» (suma), creada por Leibniz. Arquímedes ya calculó áreas de segmentos de parábola dieciocho siglos antes con un método de exhaución, aproximando la figura con triángulos cada vez más pequeños.

El consejo de Otto

Comprueba cada primitiva derivándola: debe salir la función del integrando. En los problemas de áreas, haz un dibujo rápido con los puntos de corte antes de integrar.