Ejercicios - Integrales

Curso: 2 Bachillerato Ccss · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Integrales inmediatas

Calcula las siguientes integrales indefinidas con la tabla de primitivas. No olvides la constante de integración.

a. $\int (3x^2 - 4x + 5)\,dx$

b. $\int \left(\frac{1}{x} + e^x\right) dx$

c. $\int \sqrt{x}\,dx$

d. $\int \frac{5}{x^2}\,dx$

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Primitiva con condición

La función F cumple $F'(x) = 2x + 3$ y $F(1) = 7$.

a. Calcula la familia de primitivas de $f(x) = 2x + 3$.
b. Determina la constante usando $F(1) = 7$.
c. Escribe $F(x)$ y calcula $F(2)$.

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Cambio lineal en el argumento

Calcula, dividiendo entre el coeficiente de x en el argumento.

a. $\int e^{2x+1}\,dx$

b. $\int \frac{1}{3x - 1}\,dx$

c. $\int (2x + 1)^3\,dx$

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Regla de Barrow

Calcula con la regla de Barrow, $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

a. $\int_0^3 (x^2+1)\,dx$
b. $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$
c. $\int_0^1 e^x\,dx$

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Propiedades de la integral definida

Se sabe que $\int_1^4 f(x)\,dx = 5$ y $\int_1^2 f(x)\,dx = 2$.

a. Calcula $\int_2^4 f(x)\,dx$.
b. Calcula $\int_1^4 2f(x)\,dx$.
c. Calcula $\int_4^1 f(x)\,dx$.
d. Calcula $\int_1^4 (f(x)+3)\,dx$.

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Área bajo una curva

Sea $f(x) = x^2 + 1$, positiva en todo $\mathbb{R}$.

a. Escribe la integral que da el área entre la curva, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.
b. Calcula esa área.
c. Estima la misma área con un rectángulo de altura $f(1)$ y compara.

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – Área con cambio de signo

Calcula el área limitada por $f(x) = x^2 - 4$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 3$.

a. Halla los puntos de corte con el eje X en $[0, 3]$.
b. Calcula $\int_0^3 (x^2-4)\,dx$ y explica por qué no es el área.

c. Calcula el área en cada tramo y súmalas.

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – Área entre dos curvas

Se consideran la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 2x$.

a. Halla sus puntos de corte.
b. Indica cuál de las dos está por encima en el intervalo entre los cortes.
c. Calcula el área encerrada entre ambas.

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – Del coste marginal al coste extra

En una panadería de Valladolid, el coste marginal de fabricar la barra de pan número x es $C'(x) = 0{,}04x + 3$ euros por barra.

a. Calcula el coste de pasar de 100 a 200 barras diarias.
b. Calcula el coste variable de fabricar las primeras 100 barras.
c. Si el coste fijo es de 50 €, escribe $C(x)$ y calcula $C(200)$.
d. Interpreta el resultado del apartado a).

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – Caudal de agua acumulado

Un depósito de agua de un huerto de Murcia recibe un caudal de $q(t) = 0{,}1t + 5$ litros por minuto, con t en minutos.

a. ¿Cuántos litros entran en los primeros 10 minutos?
b. ¿Cuántos litros entran entre el minuto 10 y el minuto 20?
c. Si el depósito tenía 100 litros al principio, escribe el volumen $V(t)$ y calcula $V(30)$.
d. ¿Cuánto tarda en llegar a 400 litros?

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – Ingresos a partir del ingreso marginal

El ingreso marginal de una tienda de bicicletas, en euros por unidad, es $I'(x) = 100 - 0{,}2x$ y no se ingresa nada si no se vende ($I(0) = 0$).

a. Calcula la función de ingresos $I(x)$.
b. Calcula el ingreso por vender 300 unidades.
c. ¿Para qué x se anula el ingreso marginal?
d. Calcula el ingreso adicional al pasar de 300 a 400 unidades.

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – Beneficio acumulado

El beneficio marginal de una cafetería de Granada es $B'(x) = 60 - 0{,}3x$ euros por cada café más al día, y con 0 cafés hay una pérdida de 200 € (gastos fijos).

a. Escribe $B(x)$.
b. ¿Con cuántos cafés se obtiene el beneficio máximo?
c. Calcula el beneficio máximo.
d. ¿A partir de cuántos cafés el beneficio es positivo? (Redondea al entero superior).

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – Curva de Lorenz y desigualdad

La curva de Lorenz $L(x) = x^2$ muestra qué fracción $L(x)$ de la renta total tiene la fracción x más pobre de la población. El índice de Gini es $G = 2\displaystyle\int_0^1 (x - L(x))dx$.

a. ¿Qué fracción de la renta tiene el 50 % más pobre?
b. Calcula $\displaystyle\int_0^1 (x - x^2)\,dx$.
c. Calcula el índice de Gini.
d. Interpreta el valor obtenido.

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – Valor medio de una función

La temperatura de un invernadero de Almería durante el día es $T(t) = -0{,}5t^2 + 6t + 8$ grados, con t en horas, $0 \le t \le 12$. El valor medio de T en $[a, b]$ es $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b T(t)\,dt$.

a. Calcula $T(0)$ y $T(12)$.
b. Calcula $\displaystyle\int_0^{12} T(t)\,dt$.
c. Calcula la temperatura media.
d. ¿En qué instante se alcanza la temperatura máxima y cuál es?

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – Problema: las ventas de un producto que se agota

Una tienda en línea de Bilbao vende un modelo de auriculares y sus ventas, en unidades por día, bajan con el tiempo según $v(t) = 20e^{-0{,}1t}$ (t en días desde el lanzamiento).

a. ¿Cuántas unidades por día se venden al lanzarlo y a los 10 días?
b. Calcula las unidades vendidas en los primeros 10 días con una integral.
c. Calcula las unidades vendidas entre el día 10 y el día 30.
d. ¿Hacia qué cantidad tienden las ventas totales si se esperara indefinidamente?
e. ¿Cuántos días tardan en venderse 100 unidades?

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – Problema: el terreno entre el camino y el río

En un plano a escala, un camino recto tiene por ecuación $y = x$ y la orilla curva de un río $y = 4x - x^2$, con x e y medidos en decenas de metros. Una cooperativa de Extremadura quiere saber qué superficie tiene la parcela comprendida entre ambos.

a. Halla las abscisas de los puntos de corte del camino y de la orilla.
b. Indica qué curva queda por encima entre esos puntos.
c. Calcula el área en unidades del plano.
d. Pasa el resultado a metros cuadrados (cada unidad del plano es una decena de metros por lado).
e. Si el metro cuadrado cuesta 8 €, calcula el valor de la parcela.

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – Problema: el excedente del consumidor

La función de demanda de entradas de un concierto de una banda local es $p(q) = 50 - 0{,}5q$ euros, donde q es el número de entradas. Se fija un precio de venta de 30 €. El excedente del consumidor es $\int_0^{q_0} (p(q) - p_0)dq$, con p_0 el precio y q_0 la cantidad demandada a ese precio.

a. Calcula cuántas entradas se demandan a 30 €.
b. Escribe la integral del excedente del consumidor.
c. Calcula el excedente.
d. Calcula el ingreso por entradas y el valor total que los consumidores daban a las entradas.
e. Interpreta el excedente.

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Problema: la etapa del ciclista

La velocidad de una ciclista en una etapa corta, en km/h, es $v(t) = -t^2 + 6t$ para $0 \le t \le 6$ horas.

a. ¿En qué instante lleva la velocidad máxima y cuánto vale?
b. Calcula la distancia recorrida en las 3 primeras horas.
c. Calcula la distancia recorrida en las 6 horas.

d. Calcula la velocidad media en las 6 horas.
e. ¿Es razonable el modelo? Justifica.

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Problema: dos opciones de ahorro comparadas

Una persona compara dos productos de ahorro durante un año. El primero genera un rendimiento acumulado de $f(t) = e^t$ miles de euros de valor equivalente y el segundo $g(t) = t + 1$, con t en años, $0 \leq t \leq 1$ (modelo simplificado). Interesa el área entre ambas curvas.

a. Comprueba que las dos curvas coinciden en $t = 0$.
b. ¿Cuál de las dos queda por encima en $(0, 1]$? Justifícalo comparando en $t = 1$.
c. Calcula el área entre ambas en $[0, 1]$.
d. Calcula su valor aproximado con dos decimales.
e. Explica el significado del área en este contexto.

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: integrales

Resuelve estos retos de integrales.

a. Halla $k > 0$ para que $\int_0^k 2x\,dx = 9$.
b. Calcula $\int_0^1 xe^{x^2}dx$ con el cambio $u = x^2$.
c. Halla el área encerrada entre $y = x^2$ e $y = 4$.
d. Si $F(x) = \int_0^x (3t^2 + 1)\,dt$, calcula $F'(2)$ sin hallar F.