Soluciones - Integrales

Curso: 2 Bachillerato Ccss

Solución del ejercicio 1

a. Integramos término a término con $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$: $\int 3x^2 dx = x^3$, $\int 4x\,dx = 2x^2$ y $\int 5\,dx = 5x$. Resultado: $x^3 - 2x^2 + 5x + C$.

b. Usamos las primitivas inmediatas $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$ y $\int e^x\,dx = e^x$: $\ln|x| + e^x + C$.

c. Escribimos la raíz como potencia, $\sqrt{x} = x^{1/2}$: $\displaystyle\int x^{1/2} dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$.

d. Sacamos la constante y escribimos $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$: $5\displaystyle\int x^{-2} dx = 5 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{5}{x} + C$. Comprobación: derivando $-\frac{5}{x}$ se obtiene $\frac{5}{x^2}$.

Solución del ejercicio 2

a. Integramos cada sumando: $\int (2x+3)\,dx = x^2 + 3x + C$. Es una familia de funciones que solo se diferencian en una constante.

b. La condición $F(1) = 7$ elige una de ellas: $F(1) = 1^2 + 3 \cdot 1 + C = 4 + C = 7$, luego $C = 3$.

c. La primitiva buscada es $F(x) = x^2 + 3x + 3$. Comprobamos: $F'(x) = 2x + 3$ y $F(1) = 7$. Además, $F(2) = 4 + 6 + 3 = 13$.

Solución del ejercicio 3

a. Si el exponente es $ax + b$, la primitiva es $\dfrac{1}{a}e^{ax+b}$, porque al derivar aparece el factor a. Aquí $a = 2$: $\displaystyle\int e^{2x+1} dx = \frac{1}{2}e^{2x+1} + C$.

b. La derivada de $\ln|3x-1|$ es $\dfrac{3}{3x-1}$, así que hay que dividir entre 3: $\displaystyle\int \frac{1}{3x-1} dx = \frac{1}{3}\ln|3x-1| + C$.

c. Aplicamos la regla de la potencia y dividimos entre el coeficiente 2: $\displaystyle\int (2x+1)^3 dx = \frac{(2x+1)^4}{4 \cdot 2} + C = \frac{(2x+1)^4}{8} + C$. Comprobación: al derivar, $\dfrac{4(2x+1)^3 \cdot 2}{8} = (2x+1)^3$.

Solución del ejercicio 4

a. Una primitiva de x^2+1 es $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+x$. Por la regla de Barrow,
$\displaystyle\int_0^3 (x^2+1)\,dx = F(3)-F(0) = (9+3)-0 = 12$.

b. Una primitiva de $\frac{1}{x}$ es $F(x)=\ln x$ (en $[1,e]$ la variable es positiva). Entonces $\ln e - \ln 1 = 1-0 = 1$.

c. Una primitiva de e^x es la propia e^x: $e^1-e^0 = e-1 \approx 1{,}718$. En los tres casos no hace falta la constante C, porque se cancela al restar.

Solución del ejercicio 5

a. Por la aditividad respecto del intervalo, $\int_1^4 f = \int_1^2 f + \int_2^4 f$. Despejando: $\int_2^4 f = 5-2 = 3$.

b. Las constantes salen fuera de la integral: $\int_1^4 2f(x)\,dx = 2\int_1^4 f(x)\,dx = 2\cdot 5 = 10$.

c. Al intercambiar los límites de integración, la integral cambia de signo: $\int_4^1 f(x)\,dx = -\int_1^4 f(x)\,dx = -5$.

d. La integral de una suma es la suma de integrales, y $\int_1^4 3\,dx = 3\cdot(4-1) = 9$. Por tanto, $\int_1^4 (f(x)+3)\,dx = 5+9 = 14$.

Solución del ejercicio 6

a. Como $f(x)=x^2+1$ es positiva, el área bajo la curva coincide con la integral definida: $A=\displaystyle\int_0^2 (x^2+1)\,dx$.

b. Una primitiva es $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+x$. Por Barrow,
$A = F(2)-F(0) = \dfrac{8}{3}+2 = \dfrac{14}{3} \approx 4{,}67$ u^2.

c. El rectángulo tiene base 2 y altura $f(1)=2$, así que su área es $2\cdot 2 = 4$ u^2. Es algo menor que el valor exacto, $4{,}67$, porque la curva es convexa: lo que el rectángulo pierde a la derecha es más de lo que gana a la izquierda.

Solución del ejercicio 7

a. $x^2-4=0$ da $x=\pm 2$; en $[0,3]$ solo vale $x=2$.

b. $\left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_0^3 = 9 - 12 = -3$. No es el área porque la parte de $[0, 2]$ está bajo el eje (aporta negativo) y la de $[2, 3]$ está sobre él.

c. ; $A_2 = \int_2^3 = (9 - 12) - \left(\frac{8}{3} - 8\right) = \frac{7}{3}$. Área total $\frac{23}{3} \approx 7{,}67$ u^2.

Solución del ejercicio 8

a. Igualamos las dos expresiones: $x^2 = 2x$, es decir, $x(x - 2) = 0$, con $x = 0$ y $x = 2$. Los puntos de corte son $(0, 0)$ y $(2, 4)$.
b. Probamos un valor intermedio, $x = 1$: la recta vale 2 y la parábola 1. Entre los cortes, la recta está por encima.
c. El área entre dos curvas es la integral de «la de arriba menos la de abajo»: $A = \int_0^2 (2x - x^2)\, dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$ u^2.

Solución del ejercicio 9

a. El coste de pasar de 100 a 200 barras es la integral del coste marginal entre esos valores: $\int_{100}^{200} (0{,}04x + 3)\, dx = \left[0{,}02x^2 + 3x\right]_{100}^{200} = (800 + 600) - (200 + 300) = 900$ €.
b. El coste variable de las primeras 100 es $\int_0^{100} (0{,}04x + 3)\, dx = 0{,}02 \cdot 10\,000 + 300 = 500$ €.
c. El coste total es el variable más el fijo: $C(x) = 0{,}02x^2 + 3x + 50$. Por tanto, $C(200) = 800 + 600 + 50 = 1\,450$ €.
d. Producir 100 barras adicionales, de la 101 a la 200, cuesta 900 € más, es decir, 9 € por barra de media; cada barra cuesta más que las primeras porque el coste marginal crece.

Solución del ejercicio 10

a. El volumen que entra es la integral del caudal: $\int_0^{10} (0{,}1t + 5)\, dt = \left[0{,}05t^2 + 5t\right]_0^{10} = 5 + 50 = 55$ litros.
b. Con la misma primitiva, entre los minutos 10 y 20: $\left[0{,}05t^2 + 5t\right]_{10}^{20} = (20 + 100) - (5 + 50) = 65$ litros. Entran más que antes porque

el caudal aumenta.

c. Al volumen inicial le sumamos lo que entra: $V(t) = 100 + 0{,}05t^2 + 5t$. Así $V(30) = 100 + 45 + 150 = 295$ litros.

d. Resolvemos $0{,}05t^2 + 5t + 100 = 400$; multiplicando por 20, $t^2 + 100t - 6\,000 = 0$. La solución positiva es $t = \dfrac{-100 + \sqrt{34\,000}}{2} = \dfrac{-100 + 184{,}4}{2} = 42{,}2$ min.

Solución del ejercicio 11

a. El ingreso es la primitiva del ingreso marginal que vale 0 en $x = 0$: $I(x) = \displaystyle\int_0^x (100 - 0{,}2s)\,ds = 100x - 0{,}1x^2$.

b. $I(300) = 100 \cdot 300 - 0{,}1 \cdot 90\,000 = 30\,000 - 9\,000 = 21\,000$ €.

c. $100 - 0{,}2x = 0$ da $x = 500$ unidades. A partir de ahí vender más reduce el ingreso, así que con 500 unidades el ingreso es máximo.

d. El ingreso adicional es la diferencia de ingresos (o la integral del marginal entre 300 y 400): $I(400) - I(300) = (40\,000 - 16\,000) - 21\,000 = 3\,000$ €.

Solución del ejercicio 12

a. El beneficio es el valor inicial más la integral del beneficio marginal: $B(x) = -200 + \displaystyle\int_0^x (60 - 0{,}3s)\,ds = -200 + 60x - 0{,}15x^2$.

b. Igualamos el marginal a cero: $60 - 0{,}3x = 0$, luego $x = 200$ cafés. Es un máximo porque B' pasa de positivo a negativo.

c. $B(200) = -200 + 12\,000 - 0{,}15 \cdot 40\,000 = -200 + 12\,000 - 6\,000 = 5\,800$ €.

d. Resolvemos $-0{,}15x^2 + 60x - 200 = 0$; la raíz pequeña es $x = \dfrac{60 - \sqrt{3\,480}}{0{,}3} \approx 3{,}4$.

Como el número de cafés es entero, el beneficio es positivo a partir de 4 cafés.

Solución del ejercicio 13

a. $L(0{,}5) = 0{,}5^2 = 0{,}25$: el 50 % más pobre de la población tiene solo el 25 % de la renta.

b. Una primitiva de $x - x^2$ es $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}$. Por Barrow: $\left[\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}\right]_0^1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$. Es el área entre la diagonal $y = x$ (igualdad perfecta) y la curva de Lorenz.

c. $G = 2 \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3} \approx 0{,}33$.

d. El índice de Gini va de 0 (igualdad perfecta: todos tienen la misma renta) a 1 (desigualdad máxima). Un valor de $0{,}33$ indica una desigualdad moderada.

Solución del ejercicio 14

a. $T(0) = 8$ °C y $T(12) = -0{,}5 \cdot 144 + 72 + 8 = -72 + 72 + 8 = 8$ °C: el día empieza y acaba a la misma temperatura.

b. Una primitiva de T es $-\dfrac{t^3}{6} + 3t^2 + 8t$. Por Barrow:

$$\left[-\frac{t^3}{6} + 3t^2 + 8t\right]_0^{12} = -288 + 432 + 96 = 240.$$

c. Dividimos entre la longitud del intervalo: temperatura media $= \dfrac{240}{12} = 20$ °C.

d. $T'(t) = -t + 6 = 0$ da $t = 6$ h, y es un máximo porque la parábola se abre hacia abajo. $T(6) = -18 + 36 + 8 = 26$ °C es la temperatura máxima, 6 grados por encima de la media.

Solución del ejercicio 15

a. $v(0) = 20e^0 = 20$ unidades al día al lanzarlo y $v(10) = 20e^{-1} \approx 7{,}36$ unidades al día a los 10 días.

b. Las ventas acumuladas son la integral de la velocidad de ventas. Una primitiva de $20e^{-0{,}1t}$ es $-200e^{-0{,}1t}$: $\displaystyle\int_0^{10} 20e^{-0{,}1t}dt = \left[-200e^{-0{,}1t}\right]_0^{10} = 200(1 - e^{-1}) \approx 126{,}42$ unidades.

c. $\left[-200e^{-0{,}1t}\right]_{10}^{30} = 200(e^{-1} - e^{-3}) \approx 200(0{,}3679 - 0{,}0498) = 63{,}6$ unidades.

d. Como $e^{-0{,}1t} \to 0$, las ventas totales tienden a $200(1 - 0) = 200$ unidades.

e. $200(1 - e^{-0{,}1T}) = 100$ da $e^{-0{,}1T} = 0{,}5$, luego $T = 10 \ln 2 \approx 6{,}93$ días.

Solución del ejercicio 16

a. Igualamos las dos ecuaciones: $4x - x^2 = x$, es decir, $x^2 - 3x = 0$, con $x = 0$ y $x = 3$.

b. En $x = 1$ la orilla vale $4 - 1 = 3$ y el camino 1, así que la orilla queda por encima del camino.

c. $\displaystyle A = \int_0^3 \left((4x - x^2) - x\right) dx = \int_0^3 (3x - x^2)\, dx = \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{27}{2} - 9 = \frac{9}{2}$ unidades cuadradas.

d. Cada unidad cuadrada del plano es un cuadrado de 10 m de lado, es decir, 100 m^2: $4{,}5 \cdot 100 = 450$ m^2.

e. Valor de la parcela: $450 \cdot 8 = 3\,600$ €.

Solución del ejercicio 17

a. $50 - 0{,}5q = 30$ da $q_0 = 40$ entradas.

b. $EC = \int_0^{40} (50 - 0{,}5q - 30)\, dq = \int_0^{40} (20 - 0{,}5q)\, dq.$

c. $\left[20q - 0{,}25q^2\right]_0^{40} = 800 - 400 = 400$ €.

d. Ingreso: $30 \cdot 40 = 1\,200$ €. Valor total para los consumidores: $\int_0^{40}(50 - 0{,}5q)dq = 2\,000 - 400 = 1\,600$ € $= 1\,200 + 400$.

e. Los compradores habrían estado dispuestos a pagar 400 € más en total; es lo que «ahorran» al pagar todos el mismo precio de 30 €.

Solución del ejercicio 18

a. $v'(t) = -2t + 6 = 0$ da $t = 3$; $v(3) = 9$ km/h.

b. $\int_0^3 (-t^2 + 6t)\, dt = \left[-\frac{t^3}{3} + 3t^2\right]_0^3 = -9 + 27 = 18$ km.

c. $\left[-\frac{t^3}{3} + 3t^2\right]_0^6 = -72 + 108 = 36$ km.

d. $\frac{36}{6} = 6$ km/h.

e. Es un modelo sencillo: la velocidad parte y termina en 0 km/h y alcanza un máximo de 9 km/h, algo bajo para un ciclista, pero útil para practicar la integral.

Solución del ejercicio 19

a. $f(0) = 1$ y $g(0) = 1$.

b. $f(1) = e \approx 2{,}718$ y $g(1) = 2$: la exponencial queda por encima.

c. $A = \int_0^1 (e^t - t - 1)\, dt = \left[e^t - \frac{t^2}{2} - t\right]_0^1 = \left(e - \frac{3}{2}\right) - 1 = e - \frac{5}{2}.$

d. $A \approx 2{,}718 - 2{,}5 = 0{,}22.$

e. Es la diferencia acumulada entre las dos opciones a lo largo del año: la exponencial gana unas 0,22 unidades más de valor acumulado.

Solución del ejercicio 20

a. Una primitiva de $2x$ es x^2, así que $\int_0^k 2x\, dx = k^2 - 0 = k^2$. Igualando, $k^2 = 9$, y como $k > 0$, $k = 3$.

b. Con $u = x^2$ se tiene $du = 2x\, dx$, y los límites pasan a $u = 0$ y $u = 1$:

$$\int_0^1 xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^u\,du = \frac{e-1}{2} \approx 0{,}859.$$

c. Los cortes de $y = x^2$ con $y = 4$ son $x = \pm 2$, y la recta queda por encima:
$$\int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = 2\left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}\ \text{u}^2.$$

d. Por el teorema fundamental del cálculo, la derivada de $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ es $f(x)$: $F'(x) = 3x^2 + 1$, luego $F'(2) = 13$.