Soluciones del examen - Distribuciones binomial y normal

Curso: 2 Bachillerato Ccss · Duración: 90 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (3 puntos)

a. En una distribución de probabilidad la suma de las probabilidades es 1: $0{,}1 + 0{,}4 + k + 0{,}2 = 1$, luego $k = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$. Además, $k = 0{,}3$ está entre 0 y 1, como debe ocurrir con cualquier probabilidad. (0,5 puntos)

b. Multiplicamos cada valor por su probabilidad: $\mu = 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}4 + 3 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}2 = 0{,}1 + 0{,}8 + 0{,}9 + 0{,}8 = 2{,}6$. La media 2,6 queda entre los valores 2 y 3, algo más cerca de 2, que es el valor más probable. (1 punto)

c. $\sum x^2 p = 1 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}4 + 9 \cdot 0{,}3 + 16 \cdot 0{,}2 = 0{,}1 + 1{,}6 + 2{,}7 + 3{,}2 = 7{,}6$. La varianza es $\sigma^2 = 7{,}6 - 2{,}6^2 = 7{,}6 - 6{,}76 = 0{,}84$ y la desviación típica $\sigma = \sqrt{0{,}84} \approx 0{,}917$. Se usa la fórmula abreviada $\sigma^2 = \sum x^2 p - \mu^2$; el resultado es positivo, como toda varianza, y la desviación se expresa en las mismas unidades que X. (1,5 puntos)

Solución del ejercicio 2 (3 puntos)

a. Fórmula binomial con $p = 0{,}2$ y $q = 0{,}8$: $P(X = 2) = \binom{8}{2} 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^6 = 28 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}262144 \approx 0{,}2936$. El número $\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ cuenta las formas de elegir qué dos clientes compran la funda. (1 punto)

b. Usamos el suceso contrario, «ninguno compra funda»: $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}8^8 = 1 - 0{,}1678 = 0{,}8322$. Calcular directamente $P(X = 1) + \cdots + P(X = 8)$ sería mucho más largo; el contrario reduce el cálculo a un solo término. (1 punto)

c. $\mu = np = 8 \cdot 0{,}2 = 1{,}6$ clientes y $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = \sqrt{1{,}28} \approx 1{,}131$. De cada 8 clientes, por término medio, 1,6 compran funda. La varianza es $npq = 1{,}28$ y su raíz cuadrada da la desviación típica. (1 punto)

Respuesta: $P(X = 2) \approx 0{,}29$, $P(X \geq 1) \approx 0{,}83$, $\mu = 1{,}6$ y $\sigma \approx 1{,}13$.

Solución del ejercicio 3 (4 puntos)

a. Tipificamos: $z = \dfrac{6 - 5}{0{,}8} = 1{,}25$. Como la tabla da el área a la izquierda, $P(X > 6) = 1 - \Phi(1{,}25) = 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056$. (1,5 puntos)

b. Los extremos 4 y 6 son simétricos respecto de la media: $z = \pm 1{,}25$. $P(4$. (1,5

puntos)

c. Buscamos el peso que es mayor que el del 90 % de las sandías, es decir, el que deja por debajo un área de 0,90, con $z = 1{,}28$. Destipificamos con $x = \mu + z\sigma$: $x = 5 + 1{,}28 \cdot 0{,}8 = 6{,}024$ kg. Solo el 10 % de las sandías pesa más de unos 6 kg. (1 punto)

Solución del ejercicio 4 (4 puntos)

a. $X \sim B(400;\ 0{,}3)$. Como $np = 120 \geq 5$ y $nq = 280 \geq 5$, se aproxima por la normal de media 120 y desviación $\sqrt{400 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7} = \sqrt{84} = 9{,}165$: $X \approx N(120;\ 9{,}165)$. Comprobar las condiciones $np \geq 5$ y $nq \geq 5$ forma parte de la puntuación de este apartado. (1 punto)

b. X equivale a $X \leq 129$; con la corrección de continuidad, $P(Y$. $z = \dfrac{129{,}5 - 120}{9{,}165} = 1{,}04$ y $P = \Phi(1{,}04) = 0{,}8508$. Sin la corrección de continuidad se obtendría $z \approx 1{,}09$, un resultado algo distinto. (1,5 puntos)

c. $X > 110$ equivale a $X \geq 111$, es decir, $P(Y > 110{,}5)$. $z = \dfrac{110{,}5 - 120}{9{,}165} = -1{,}04$ y, por simetría, $P = \Phi(1{,}04) = 0{,}8508$. Los dos resultados coinciden porque 129,5 y 110,5 están a la misma distancia, 9,5, de la media 120. (1,5 puntos)

Solución del ejercicio 5 (6 puntos)

a. $P(X = 9) = \binom{12}{9} 0{,}7^9 \cdot 0{,}3^3 = 220 \cdot 0{,}040354 \cdot 0{,}027 \approx 0{,}2397$. El número combinatorio vale $\binom{12}{9} = \binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{6} = 220$. (1 punto)

b. Aprueban todos si los 12 aprueban: $P(X = 12) = 0{,}7^{12} \approx 0{,}0138$. Es un valor muy pequeño: solo en algo más del 1 % de los grupos aprobarían todos. (1 punto)

c. Suspender como mucho 2 equivale a aprobar 10, 11 o 12: $P(10) + P(11) + P(12) = 0{,}1678 + 0{,}0712 + 0{,}0138 = 0{,}2528$. Cada término se calcula con la fórmula binomial; por ejemplo, $P(X = 11) = 12 \cdot 0{,}7^{11} \cdot 0{,}3 \approx 0{,}0712$. (1,5 puntos)

d. $\mu = np = 12 \cdot 0{,}7 = 8{,}4$ aprobados y $\sigma = \sqrt{12 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3} = \sqrt{2{,}52} \approx 1{,}587$. Es decir, se espera que aprueben unos 8 alumnos de cada 12. (1 punto)

e. $B(200;\ 0{,}7) \approx N(140;\ \sqrt{42}) = N(140;\ 6{,}481)$, pues np y nq superan 5. $P(X > 150) = P(X \geq 151) \approx P(Y > 150{,}5)$; $z = \dfrac{10{,}5}{6{,}481} = 1{,}62$ y $P = 1 - 0{,}9474 = 0{,}0526$. La media es $200 \cdot 0{,}7 = 140$ y la varianza $200 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 42$. Solo en torno a un 5 % de las veces aprobarían más de 150. (1,5 puntos)