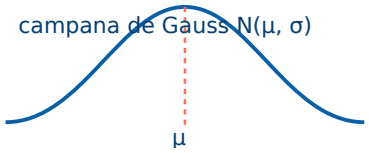
Apuntes - Distribuciones binomial y normal

Curso: 2 Bachillerato Ccss

La distribución binomial describe el número de éxitos en repeticiones independientes de un experimento, y la normal modela magnitudes continuas como alturas, notas o tiempos. Aprenderás a calcular probabilidades con ambas, a tipificar y a usar la normal para aproximar la binomial.

Actividad de introducción: ¿cuántos aprobarán?

Una profesora de Bachillerato sabe que cada alumno aprueba el examen de recuperación con probabilidad $0{,}6$, de forma independiente de los demás. Si se presentan 5 alumnos, no podemos asegurar cuántos aprobarán, pero sí podemos calcular la probabilidad de que aprueben exactamente 3, o de que aprueben al menos 4. Esa situación se repite en muchos contextos: aciertos en un test, piezas defectuosas en un lote, clientes que compran un producto. Cuando el número de repeticiones es muy grande, calcular con la fórmula exacta resulta pesado y aparece la campana de Gauss, la distribución normal, que describe también magnitudes continuas como la altura, el peso o el tiempo. En este tema aprenderás a trabajar con ambas distribuciones y a pasar de una a otra.



Variable aleatoria discreta

Definición: variable aleatoria

Una **variable aleatoria** X asigna un número a cada resultado de un experimento aleatorio. Es **discreta** si toma valores aislados (0, 1, 2, ...). Su **distribución de probabilidad** es la tabla de pares (x_i, p_i) con $\sum p_i = 1$.

Regla: media y desviación típica

$\mu = E(X) = \sum x_i p_i$; $\sigma^2 = \sum x_i^2 p_i - \mu^2$; $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

Ejemplo 1

Una variable toma los valores 0, 1, 2 y 3 con probabilidades 0,1; 0,3; 0,4 y 0,2. Halla μ y σ.

$\mu = 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}4 + 3 \cdot 0{,}2 = 1{,}7$. $\sum x_i^2 p_i = 0{,}3 + 1{,}6 + 1{,}8 = 3{,}7$. $\sigma^2 = 3{,}7 - 1{,}7^2 = 0{,}81$ y $\sigma = 0{,}9$.

Distribución binomial

Definición: distribución binomial

Se repite n veces un experimento con dos resultados (éxito con probabilidad p, fracaso con $q = 1 - p$), de forma independiente. El número de éxitos X sigue una **binomial** $B(n, p)$.

Regla: fórmula de la binomial

$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, con $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Media $\mu = np$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq}$.

Ejemplo 2

Un examen tipo test tiene 10 preguntas con 4 opciones. Si se responde al azar, ¿cuál es la probabilidad de acertar exactamente 3? ¿Y de acertar al menos una?

$X \sim B(10;\, 0{,}25)$. $P(X = 3) = \binom{10}{3} 0{,}25^3 \cdot 0{,}75^7 = 120 \cdot 0{,}015625 \cdot 0{,}13348 \approx 0{,}2503$. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}75^{10} = 1 - 0{,}0563 = 0{,}9437$.

¡Atención!

La binomial exige independencia y la misma probabilidad p en cada intento. «Al menos uno» se calcula casi siempre con el complementario: $1 - P(X = 0)$.

Distribución normal

Definición: distribución normal

Una variable continua X sigue una **normal** $N(\mu, \sigma)$ si su gráfica es la campana de Gauss, simétrica respecto a μ. La normal estándar es $N(0, 1)$ y se denota Z. Su tabla da $\Phi(z) = P(Z \leq z)$.

Regla: tipificación

Si $X \sim N(\mu, \sigma)$, entonces $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$. Propiedades: $P(Z > z) = 1 - \Phi(z)$ y $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ (simetría).

Propiedad: regla empírica

En $N(\mu,\sigma)$, aproximadamente el 68 % de los valores está en $(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$, el 95 % en $(\mu-2\sigma,\mu+2\sigma)$ y el 99,7 % en $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$.

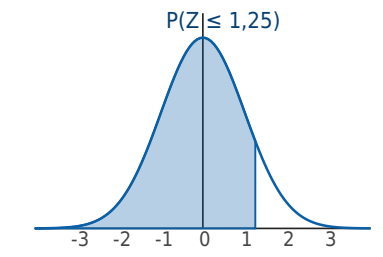
Método: calcular probabilidades con la normal

1. Escribe el suceso en términos de X.
2. Tipifica: resta μ y divide entre σ.
3. Pasa a Φ: $P(Z\le z)$, $1-\Phi(z)$ o $\Phi(b)-\Phi(a)$, usando la simetría para z negativos.
4. Busca Φ en la tabla y da la probabilidad.

Ejemplo 3

Las alturas de un grupo siguen $N(170,6)$ cm. Halla la probabilidad de que alguien mida más de 180 cm.

$z=\dfrac{180-170}{6}=1{,}67$. $P(X>180)=1-\Phi(1{,}67)=1-0{,}9525=0{,}0475$.



Ejemplo 4

Si $X\sim N(70,8)$, halla $P(60\le X\le 80)$.

$z_1=\dfrac{60-70}{8}=-1{,}25$ y $z_2=1{,}25$.

$P=\Phi(1{,}25)-\Phi(-1{,}25)=2\Phi(1{,}25)-1=2\cdot 0{,}8944-1=0{,}7888$.

Ejemplo 5

Las notas de un examen siguen $N(500,50)$. ¿Qué puntuación deja por debajo al 90 % de los alumnos?

Se busca z con $\Phi(z)=0{,}90$: $z\approx 1{,}28$. $x=\mu+z\sigma=500+1{,}28\cdot 50=564$ puntos.

Aproximación de la binomial por la normal

Teorema: aproximación

Si $X \sim B(n,p)$ con $np \geq 5$ y $nq \geq 5$, se puede aproximar por $Y \sim N\left(np, \sqrt{npq}\right)$. Para mejorar la aproximación se usa la **corrección de continuidad**:
$P(X \leq k) \approx P(Y \leq k+0{,}5)$ y $P(X \geq k) \approx P(Y \geq k-0{,}5)$.

Ejemplo 6

Si $X \sim B(100;\, 0{,}4)$, calcula aproximadamente $P(X \leq 45)$.

$\mu = 40$ y $\sigma = \sqrt{100 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} = \sqrt{24} \approx 4{,}90$.

$$P(X \leq 45) \approx P\left(Z \leq \frac{45{,}5 - 40}{4{,}90}\right) = \Phi(1{,}12) = 0{,}8686.$$

Ejemplo 7

Un juego de azar cuesta 2 € y paga 5 € si sale un 6 al lanzar un dado (y nada en otro caso). Calcula la ganancia media por partida.

La ganancia G vale $5 - 2 = 3$ con probabilidad $\frac{1}{6}$ y -2 con probabilidad $\frac{5}{6}$.
$E(G) = 3 \cdot \frac{1}{6} - 2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{3-10}{6} = -\frac{7}{6} \approx -1{,}17$ €. A la larga se pierden unos 1,17 € por partida: el juego no es favorable.

Ejemplo 8

Los pesos de unos paquetes siguen $N(50, 4)$ g. Usa la regla empírica para dar un intervalo con el 95 % de los paquetes.

El 95 % está a dos desviaciones típicas de la media: $50 \pm 2 \cdot 4$, es decir, entre 42 g y 58 g. Con la tabla, el 95 % exacto corresponde a $z = 1{,}96$, que da $50 \pm 7{,}84$.

Observación

La media de una binomial np es el número de éxitos que se espera por término medio: en 100 lanzamientos de moneda, unas 50 caras. La desviación típica $\sqrt{npq}$ mide cuánto se aleja el resultado real de ese valor esperado.

Observación

En la PAU de Ciencias Sociales hay un problema con binomial (fórmula o aproximación a la normal) o con normal (tipificar, probabilidades y, a veces, hallar el valor que deja una probabilidad dada). Entregan la tabla $N(0,1)$. Indica siempre el modelo: «Sea $X \sim B(n,p)$» o «Sea $X \sim N(\mu,\sigma)$».

Cómo elegir el modelo adecuado

Método: binomial o normal

1. Si cuentas éxitos en n pruebas independientes con la misma probabilidad p, el modelo es binomial $B(n;\, p)$.
2. Si la variable mide una cantidad continua (peso, tiempo, altura, nota) con forma de campana, el modelo es normal $N(\mu;\, \sigma)$.
3. Si n es grande ($np \geq 5$ y $nq \geq 5$), aproxima la binomial por $N(np;\, \sqrt{npq})$ y aplica la corrección de continuidad.
4. En la normal, tipifica con $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ y busca en la tabla de Φ.
5. Redacta el resultado como probabilidad o porcentaje y explica qué significa en el contexto.

Ejemplo 9

En un examen tipo test de 30 preguntas con cuatro opciones se contesta todo al azar. Calcula la probabilidad de acertar más de 10 preguntas.

$X \sim B(30;\, 0{,}25)$ con $np = 7{,}5 \geq 5$ y $nq = 22{,}5 \geq 5$, luego $X \approx N(7{,}5;\, \sqrt{5{,}625}) = N(7{,}5;\, 2{,}372)$. Pedimos $P(X \geq 11) \approx P(Y > 10{,}5)$. Tipificamos: $z = \dfrac{10{,}5 - 7{,}5}{2{,}372} = 1{,}26$. Entonces $P = 1 - \Phi(1{,}26) = 1 - 0{,}8962 = 0{,}1038$. Contestar al azar da algo más de un 10 % de probabilidad de superar los 10 aciertos.

Observación: la corrección de continuidad

La binomial toma valores enteros y la normal es continua. Para pasar de una a otra se «ensancha» cada entero medio punto por cada lado. Así, $P(X = k)$ se aproxima por $P(k - 0{,}5$, $P(X \leq k)$ por $P(Y$ y $P(X \geq k)$ por $P(Y > k - 0{,}5)$. Olvidar esta corrección produce errores pequeños pero visibles, sobre todo cuando n no es muy grande, y en la prueba de acceso se espera que la apliques cuando se aproxima una binomial.

Ejemplo 10

El tiempo de espera en la consulta de un médico sigue una normal de media 20 min y desviación típica 5 min. ¿Qué probabilidad hay de esperar entre 15 y 30 minutos?

Tipificamos: $z_1 = \dfrac{15 - 20}{5} = -1$ y $z_2 = \dfrac{30 - 20}{5} = 2$. Entonces $P(-1$. Hay una probabilidad del 81,85 % de esperar entre 15 y 30 minutos.

Calcular un valor a partir de una probabilidad

Método: el problema inverso

1. Escribe la condición como $P(X$ (si pide «por encima», pasa al complementario).
2. Busca en el cuerpo de la tabla de Φ el valor más cercano a esa probabilidad y

lee el z correspondiente en los márgenes.
3. Deshaz la tipificación: $k = \mu + z\sigma$.
4. Interpreta el resultado con unidades y comprueba que tiene sentido, por ejemplo que un percentil alto queda por encima de la media.

Ejemplo 11

El peso de los recién nacidos en un hospital sigue una normal $N(3\,300;\ 500)$ gramos. ¿Por debajo de qué peso nace el 10 % de los bebés más ligeros?

Buscamos k con $P(X$. Como $0{,}10$, el valor de z es negativo: por simetría $\Phi(z) = 0{,}10$ equivale a $z = -1{,}28$, porque $\Phi(1{,}28) = 0{,}90$. Deshacemos la tipificación: $k = 3\,300 + (-1{,}28) \cdot 500 = 2\,660$ g. El 10 % de los recién nacidos pesa menos de 2 660 gramos.

Observación: leer bien el enunciado

En los problemas de la prueba de acceso, la mayor parte de los fallos no está en la tabla sino en la traducción del enunciado. «Al menos 3» significa $X \geq 3$, «más de 3» significa $X > 3$ y «como máximo 3» significa $X \leq 3$. En una binomial esa diferencia cambia el resultado porque las variables son discretas; en una normal no importa porque la probabilidad de un punto exacto es cero. Conviene subrayar la condición y escribirla con símbolos antes de calcular nada, y comprobar al final que la probabilidad obtenida es un número entre 0 y 1.

Observación: cambiar de unidades

Si una variable normal se transforma sumando una constante, la media aumenta en esa constante y la desviación típica no cambia; si se multiplica por una constante positiva, la media y la desviación típica quedan multiplicadas por ella. Por eso, al pasar kilogramos a gramos o euros a céntimos, basta multiplicar la media y la desviación típica por el mismo factor. Esta idea es la base de la tipificación, que convierte cualquier normal en la normal estándar de media cero y desviación típica uno.

¡Atención!

Dos errores muy frecuentes: usar la desviación típica en lugar de la varianza dentro de la raíz, y olvidar que la tabla solo da $P(Z$ para valores positivos de z. Para z negativo usa $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$. Además, cuando aproximas una binomial, comprueba siempre $np \geq 5$ y $nq \geq 5$ antes de decir que la aproximación es válida.

¿Sabías que?

La campana de Gauss aparece en tantas situaciones que Francis Galton construyó en el siglo XIX una máquina de clavos, el «tablero de Galton», en la que las bolas caen y

se acumulan formando una campana. Es la demostración mecánica de que la binomial, cuando el número de pruebas es grande, se parece cada vez más a la normal.

El consejo de Otto

Dibuja siempre la campana y sombrea la zona que buscas. Si el valor de z es negativo, usa la simetría: $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$. En la binomial, define primero n, p y qué es un éxito.