Ejercicios - Distribuciones binomial y normal

Curso: 2 Bachillerato Ccss · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Una variable aleatoria discreta

En un juego de feria se gana un número X de premios con esta distribución de probabilidad.

x_i	0	1	2	3
p_i	0,1	0,3	0,4	0,2

a. Comprueba que es una distribución de probabilidad.
b. Calcula la media μ.
c. Calcula la varianza y la desviación típica.

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Distribución binomial sencilla

Un jugador de baloncesto encesta el 30 % de sus triples y lanza 5. Sea X el número de aciertos, $X \sim B(5;\, 0{,}3)$.

a. Calcula $P(X = 2)$.
b. Calcula $P(X \geq 1)$.
c. Calcula la media y la desviación típica de X.

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Lanzar una moneda seis veces

Se lanza seis veces una moneda equilibrada. Sea X el número de caras, $X \sim B(6;\, 0{,}5)$.

a. Calcula $P(X = 3)$.
b. Calcula $P(X \geq 5)$.
c. Calcula la probabilidad de obtener entre 2 y 4 caras.
d. ¿Cuántas caras se esperan por término medio?

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Tipificar una normal

El cociente intelectual de una población sigue una normal $N(100;\ 15)$.

a. Calcula $P(X$.
b. Calcula $P(X > 130)$.
c. Calcula $P(85$.

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Uso de la tabla de la normal estándar

Sea $Z \sim N(0, 1)$. Usa la tabla de Φ.

a. $P(Z$
b. $P(Z > -0{,}5)$
c. $P(-1$
d. $P(Z > 1{,}8)$

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Percentiles de una normal

Las notas de un examen siguen una distribución $N(70;\ 10)$. Se quiere conocer el valor que deja por debajo una proporción dada.

a. Halla la nota que supera el 90 % de los estudiantes (usa $z = 1{,}28$).
b. Halla la nota que deja por debajo al 80 % (usa $z = 0{,}84$).
c. Halla la nota que deja por encima al 5 % (usa $z = 1{,}645$).

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – La estatura de los jóvenes

La estatura de los jóvenes de 18 años de una ciudad sigue una normal $N(172;\ 7)$ cm.

a. ¿Qué proporción mide más de 180 cm? (redondea z a dos decimales)
b. ¿Qué proporción mide menos de 165 cm?
c. En un instituto con 400 jóvenes de 18 años, ¿cuántos esperas que midan entre 165 y 180 cm?
d. ¿Qué estatura supera solo el 2,5 % más alto? (usa $z = 1{,}96$)

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – Un test al azar

Un test de 10 preguntas tiene 4 opciones por pregunta, de las cuales solo una es correcta. Un alumno contesta al azar. Sea X el número de aciertos, $X \sim B(10;\ 0{,}25)$.

a. Calcula $P(X = 0)$.
b. Calcula $P(X \geq 1)$.

c. Calcula la probabilidad de acertar exactamente la mitad.
d. ¿Cuántos aciertos se esperan al azar?

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – Control de calidad

En una fábrica de tornillos el 5 % de las piezas es defectuoso. Se examina una muestra de 20 piezas. Sea X el número de piezas defectuosas, $X \sim B(20;\, 0{,}05)$.

a. Calcula la probabilidad de que no haya ninguna defectuosa.
b. Calcula la probabilidad de que haya como máximo una.
c. Calcula la media y la desviación típica.
d. ¿Es muy probable que haya más de 3 defectuosas?

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – Paquetes de arroz

Una envasadora llena paquetes de arroz cuyo peso sigue una normal $N(1000;\, 8)$ gramos.

a. Calcula la probabilidad de que un paquete pese menos de 990 g.
b. Calcula la probabilidad de que pese más de 1012 g.
c. Calcula la probabilidad de que pese entre 992 y 1008 g.
d. Si se venden 5 000 paquetes, ¿cuántos esperas con menos de 990 g?

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – Las notas de selectividad

Las calificaciones de un examen de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales siguen una normal $N(6;\, 1{,}5)$. Se presentan 2 000 estudiantes.

a. ¿Qué porcentaje saca más de 8? (redondea z a dos decimales)
b. ¿Cuántos suspenden, es decir, sacan menos de 5?
c. ¿Qué nota deja por debajo al 25 % de los estudiantes? (usa $z = -0{,}67$)
d. ¿Qué nota se necesita para estar entre el 10 % mejor? (usa $z = 1{,}28$)

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – Aproximar una binomial

El 40 % de los alumnos de un instituto va andando a clase. Se eligen 100 al azar. Sea X el número de alumnos que van andando, $X \sim B(100;\, 0{,}4)$.

a. Comprueba que se puede aproximar por una normal y da sus parámetros.
b. Calcula $P(X \geq 50)$ con la corrección de continuidad.
c. Calcula $P(X \leq 35)$ con la corrección de continuidad.

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – Los pedidos de una cafetería

El número X de bocadillos que pide una pareja en una cafetería de Salamanca tiene la distribución de la tabla.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,05	0,2	0,35	0,3	0,1

a. Calcula la media de bocadillos por pedido.
b. Calcula la varianza y la desviación típica.
c. Si cada bocadillo cuesta 4 €, ¿cuánto se espera ingresar por pedido?
d. Calcula $P(X \geq 3)$.

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – La duración de las bombillas

La duración de unas bombillas LED sigue una normal $N(1\,200;\ 100)$ horas.

a. ¿Qué proporción dura más de 1 000 horas?
b. ¿Qué proporción dura entre 1 000 y 1 100 horas?
c. ¿Qué duración superan el 95 % de las bombillas? (usa $z = -1{,}645$)
d. Una bombilla está en garantía si dura más de 1 000 h. De un lote de 800, ¿cuántas se espera que cumplan la garantía?

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – Problema: la sobreventa de billetes

Una compañía aérea vende 210 billetes para un vuelo Madrid–Sevilla con 200 plazas. Sabe, por experiencia, que cada pasajero se presenta al embarque con probabilidad $0{,}95$, de forma independiente. Sea X el número de pasajeros que se presentan, $X \sim B(210;\ 0{,}95)$.

a. Calcula la media y la desviación típica de X.
b. Comprueba las condiciones para aproximar por una normal y escribe la normal.
c. Calcula la probabilidad de que se presenten más pasajeros que plazas, $P(X \geq 201)$ (con corrección de continuidad).
d. Calcula la probabilidad de que sobren plazas (se presenten 199 o menos).
e. Si se vendieran solo 205 billetes, ¿aumentaría o disminuiría el riesgo de sobreventa? Razona.

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – Problema: los salarios de una empresa

En una empresa de logística de Zaragoza, el sueldo mensual neto de los 600

empleados sigue una normal $N(1\,500;\ 300)$ euros. La dirección quiere analizar la plantilla.

a. ¿Qué porcentaje cobra menos de 1 200 €?
b. ¿Cuántos empleados cobran más de 2 000 €? (redondea z a dos decimales)
c. ¿Qué sueldo deja por debajo al 25 % de la plantilla (primer cuartil)? Usa $z = -0{,}67$.
d. ¿Y por encima al 25 % (tercer cuartil)?
e. La empresa decide subir 100 € a todos los sueldos. ¿Cómo cambian la media y la desviación típica? ¿Y si los sueldos se multiplican por 1,1?

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – Problema: una encuesta de hábitos

Una encuesta del ayuntamiento de Murcia indica que el 60 % de los jóvenes usa el transporte público a diario. Se eligen 15 jóvenes al azar. Sea X el número de ellos que lo usan, $X \sim B(15;\ 0{,}6)$.

a. Calcula $P(X = 9)$.
b. Calcula la probabilidad de que lo usen al menos 10 jóvenes.
c. Calcula la probabilidad de que lo usen como máximo 5.
d. Calcula la media y la desviación típica.
e. Interpreta la media en el contexto del problema.

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Problema: hallar los parámetros

El tiempo (en minutos) que tarda un autobús urbano en completar su ruta sigue una normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 10$ min. Se sabe que el 15,87 % de las vueltas dura menos de 40 min.

a. Traduce el dato a una condición sobre Z.
b. Halla μ.
c. Calcula la probabilidad de que una vuelta dure más de 65 min.
d. Calcula entre qué valores simétricos respecto de la media está el 95 % de las vueltas (usa $z = 1{,}96$).
e. En 200 vueltas, ¿cuántas duran más de 65 minutos?

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Problema: un juego de feria equilibrado

En una caseta de feria se paga 2 € por jugar. Con probabilidad $0{,}5$ no se gana nada (ganancia neta -2 €); con $0{,}3$ se recupera lo pagado (ganancia 0 €); con $0{,}15$ se ganan 3 € netos y con $0{,}05$ se ganan 10 € netos. Sea G la ganancia neta del jugador.

a. Escribe la distribución de G y comprueba que es válida.

b. Calcula la ganancia esperada $E(G)$.
c. Calcula la varianza y la desviación típica.
d. Si juegas 100 partidas, ¿cuánto esperas ganar o perder en total?
e. ¿Qué debería cambiar el dueño para que el juego sea equitativo, es decir, $E(G) = 0$?

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: binomial y normal

Resuelve estos retos.

a. En una binomial $B(n;\, p)$ la media es 12 y la varianza 7,2. Halla n y p.
b. Para $Z \sim N(0, 1)$, halla k con $P(-k$.
c. Una variable $X \sim N(\mu;\, \sigma)$ cumple $P(X$ y $P(X > 14) = 0{,}1587$. Halla μ y σ.
d. ¿Cuántas veces hay que lanzar una moneda para que la probabilidad de obtener al menos una cara sea mayor que $0{,}99$?