Soluciones - Distribuciones binomial y normal

Curso: 2 Bachillerato Ccss

Solución del ejercicio 1

a. Una tabla es una distribución de probabilidad si cada p_i está entre 0 y 1 y la suma total es 1. Aquí todas cumplen $0 \leq p_i \leq 1$ y $0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}2 = 1$, así que es válida.
b. La media es la suma de cada valor por su probabilidad: $\mu = 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}4 + 3 \cdot 0{,}2 = 0 + 0{,}3 + 0{,}8 + 0{,}6 = 1{,}7$ premios por partida, a largo plazo.
c. Primero $\sum x_i^2 p_i = 0 + 0{,}3 + 1{,}6 + 1{,}8 = 3{,}7$. Después $\sigma^2 = \sum x_i^2 p_i - \mu^2 = 3{,}7 - 1{,}7^2 = 3{,}7 - 2{,}89 = 0{,}81$, y la desviación típica es $\sigma = \sqrt{0{,}81} = 0{,}9$ premios.

Solución del ejercicio 2

a. Fórmula binomial $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ con $p = 0{,}3$ y $q = 0{,}7$: $P(X = 2) = \binom{5}{2} 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^3 = 10 \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}343 = 0{,}3087$.
b. «Al menos un acierto» es el contrario de «ningún acierto», que solo tiene un caso: $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}7^5 = 1 - 0{,}1681 = 0{,}8319$. Así evitamos sumar cinco probabilidades.
c. En una binomial, $\mu = np = 5 \cdot 0{,}3 = 1{,}5$ triples encestados de media, y $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{5 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7} = \sqrt{1{,}05} \approx 1{,}025$.

Solución del ejercicio 3

a. Con $p = q = 0{,}5$, todas las secuencias tienen probabilidad $0{,}5^6 = \frac{1}{64}$. Hay $\binom{6}{3} = 20$ con tres caras: $P(X = 3) = \dfrac{20}{64} = 0{,}3125$.
b. «Al menos 5» significa 5 o 6 caras: $P(X = 5) = \binom{6}{5} \dfrac{1}{64} = \dfrac{6}{64}$ y $P(X = 6) = \dfrac{1}{64}$. Sumando, $P(X \geq 5) = \dfrac{7}{64} \approx 0{,}1094$.
c. Sumamos los casos 2, 3 y 4: $P(2) = \dfrac{15}{64}$, $P(3) = \dfrac{20}{64}$, $P(4) = \dfrac{15}{64}$. En total, $\dfrac{50}{64} \approx 0{,}7813$.
d. La media es $\mu = np = 6 \cdot 0{,}5 = 3$ caras, el valor central, como cabía esperar por simetría.

Solución del ejercicio 4

a. Tipificamos con $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$: $Z = \dfrac{115 - 100}{15} = 1$. En la tabla, $P(X$.
b. $Z = \dfrac{130 - 100}{15} = 2$. La tabla da áreas a la izquierda, así que usamos el complementario: $P(Z > 2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$. Solo un 2,28 % supera 130.
c. Los extremos tipificados son -1 y 1. Por simetría, $\Phi(-1) = 1 - \Phi(1)$, y entonces $P(-1$. Es el 68 % de la regla empírica: el 68 % de la población está a menos de una desviación típica de la media.

Solución del ejercicio 5

a. La tabla da directamente el área a la izquierda: $P(Z$.
b. Por la simetría de la curva respecto de 0, el área a la derecha de $-0{,}5$ es igual al área a la izquierda de $0{,}5$: $P(Z > -0{,}5) = \Phi(0{,}5) = 0{,}6915$.
c. Restamos dos áreas: $P(-1$.
d. Usamos el complementario: $P(Z > 1{,}8) = 1 - \Phi(1{,}8) = 1 - 0{,}9641 = 0{,}0359$.

Solución del ejercicio 6

a. Buscamos la nota x con $P(X$; en la tabla, $\Phi(z) = 0{,}9$ da $z \approx 1{,}28$. Destipificamos con $x = \mu + z\sigma$: $x = 70 + 1{,}28 \cdot 10 = 82{,}8$ puntos. El 90 % de los estudiantes queda por debajo de 82,8.
b. $\Phi(z) = 0{,}8$ da $z \approx 0{,}84$. Entonces $x = 70 + 0{,}84 \cdot 10 = 78{,}4$ puntos.
c. Dejar por encima al 5 % es dejar por debajo al 95 %: $\Phi(z) = 0{,}95$ da $z = 1{,}645$. Así $x = 70 + 1{,}645 \cdot 10 = 86{,}45$ puntos.

Solución del ejercicio 7

a. Tipificamos: $z = \dfrac{180 - 172}{7} \approx 1{,}14$. Entonces $P(X > 180) = 1 - \Phi(1{,}14) = 1 - 0{,}8729 = 0{,}1271$, el 12,71 % de los jóvenes.
b. $z = \dfrac{165 - 172}{7} = -1$. Por simetría, $P(Z$.
c. Lo que no está en ninguna de las dos colas está en el centro: $P(165$. Entre 400 jóvenes se esperan $400 \cdot 0{,}7142 \approx 286$.
d. El 2,5 % más alto corresponde a $\Phi(z) = 0{,}975$, es decir, $z = 1{,}96$. Destipificando, $x = 172 + 1{,}96 \cdot 7 = 185{,}72$ cm.

Solución del ejercicio 8

a. Que no acierte ninguna significa fallar las 10, cada una con probabilidad 0,75: $P(X=0)=0{,}75^{10}\approx 0{,}0563$.
b. Por el suceso contrario: $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-0{,}0563=0{,}9437$. Es casi seguro acertar alguna.
c. Acertar la mitad es $X=5$: $P(X=5)=\binom{10}{5}0{,}25^5\cdot 0{,}75^5=252\cdot 0{,}000977\cdot 0{,}2373\approx 0{,}0584$. Solo un 5,8 % de las veces.
d. La media es $\mu=np=10\cdot 0{,}25=2{,}5$ aciertos. Contestando al azar se espera acertar solo una cuarta parte del test.

Solución del ejercicio 9

a. Ninguna defectuosa: las 20 son correctas, cada una con probabilidad 0,95. $P(X=0)=0{,}95^{20}\approx 0{,}3585$.
b. «Como máximo una» es 0 o 1: $P(X=1)=\binom{20}{1}0{,}05\cdot 0{,}95^{19}=0{,}3774$. Por tanto, $P(X\leq 1)=0{,}3585+0{,}3774=0{,}7358$.
c. $\mu=np=20\cdot 0{,}05=1$ pieza defectuosa y $\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{20\cdot 0{,}05\cdot 0{,}95}=\sqrt{0{,}95}\approx 0{,}975$.
d. Usamos el contrario: $P(X>3)=1-P(X\leq 3)\approx 1-0{,}9841=0{,}0159$. Solo un 1,6 %: es muy poco probable, y si ocurriera sería señal de que la máquina falla.

Solución del ejercicio 10

a. Tipificamos: $z=\dfrac{990-1000}{8}=-1{,}25$. Por simetría, $P(X.$
b. $z=\dfrac{1012-1000}{8}=1{,}5$. $P(X>1012)=1-\Phi(1{,}5)=1-0{,}9332=0{,}0668$.
c. Los extremos 992 y 1008 están a una desviación típica de la media, $z=\pm 1$: $P=\Phi(1)-\Phi(-1)=0{,}8413-0{,}1587=0{,}6826$.
d. El número esperado es el total por la probabilidad: $5\,000\cdot 0{,}1056=528$ paquetes con menos de 990 g.

Solución del ejercicio 11

a. Tipificamos: $z=\dfrac{8-6}{1{,}5}=1{,}33$. $P(X>8)=1-\Phi(1{,}33)=1-0{,}9082=0{,}0918$: el 9,18 % saca más de 8.
b. $z=\dfrac{5-6}{1{,}5}=-0{,}67$ y $P(X.$ De 2 000 estudiantes suspenden unos $2\,000\cdot 0{,}2514\approx 503$.

c. Destipificamos con $z = -0{,}67$: $x = 6 - 0{,}67 \cdot 1{,}5 = 4{,}995 \approx 5{,}0$. Coincide con el apartado anterior: la cuarta parte saca menos de un 5.
d. Para estar en el 10 % mejor hay que superar el valor con $z = 1{,}28$: $x = 6 + 1{,}28 \cdot 1{,}5 = 7{,}92$.

Solución del ejercicio 12

a. Se puede aproximar porque $np = 40 \geq 5$ y $nq = 60 \geq 5$. La normal tiene la misma media y desviación: $\mu = 40$ y $\sigma = \sqrt{100 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} = \sqrt{24} = 4{,}899$. Así $X \approx N(40;\ 4{,}899)$.
b. Con la corrección de continuidad, el valor entero 50 ocupa $(49{,}5;\ 50{,}5)$, así que $P(X \geq 50) \approx P(Y > 49{,}5)$. $z = \dfrac{49{,}5 - 40}{4{,}899} = 1{,}94$ y $P = 1 - 0{,}9738 = 0{,}0262$.
c. $P(X \leq 35) \approx P(Y$, con $z = \dfrac{35{,}5 - 40}{4{,}899} = -0{,}92$.
$P = 1 - \Phi(0{,}92) = 1 - 0{,}8212 = 0{,}1788$.

Solución del ejercicio 13

a. Multiplicamos cada valor por su probabilidad y sumamos: $\mu = 0 \cdot 0{,}05 + 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}35 + 3 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}1 = 0 + 0{,}2 + 0{,}7 + 0{,}9 + 0{,}4 = 2{,}2$ bocadillos por pedido.
b. $\sum x^2 p = 0 + 0{,}2 + 1{,}4 + 2{,}7 + 1{,}6 = 5{,}9$. La varianza es $\sigma^2 = 5{,}9 - 2{,}2^2 = 5{,}9 - 4{,}84 = 1{,}06$ y la desviación típica $\sigma \approx 1{,}03$ bocadillos.
c. Si cada bocadillo cuesta 4 €, el ingreso es $4X$ y su media es $4\mu = 4 \cdot 2{,}2 = 8{,}80$ € por pedido.
d. Sumamos las probabilidades de 3 y 4 bocadillos: $P(X \geq 3) = 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}4$.

Solución del ejercicio 14

a. Tipificamos: $z = \dfrac{1\,000 - 1\,200}{100} = -2$. Por simetría, $P(X > 1\,000) = P(Z > -2) = \Phi(2) = 0{,}9772$.
b. Los extremos tipificados son -2 y -1. Por simetría equivale al intervalo $(1, 2)$: $P = \Phi(2) - \Phi(1) = 0{,}9772 - 0{,}8413 = 0{,}1359$.
c. La duración que supera el 95 % deja por debajo el 5 %, con $z = -1{,}645$: $x = 1\,200 - 1{,}645 \cdot 100 = 1\,035{,}5$ horas.
d. Cada bombilla cumple la garantía con probabilidad 0,9772 (apartado a). De 800 se esperan $800 \cdot 0{,}9772 \approx 782$ bombillas en garantía.

Solución del ejercicio 15

a. $\mu = 210 \cdot 0{,}95 = 199{,}5$ y $\sigma = \sqrt{210 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05} = \sqrt{9{,}975} \approx 3{,}158$.
b. $np = 199{,}5 \geq 5$ y $nq = 10{,}5 \geq 5$: $X \approx N(199{,}5;\ 3{,}158)$.
c. $P(X \geq 201) \approx P(Y > 200{,}5)$; $z = \dfrac{200{,}5 - 199{,}5}{3{,}158} = 0{,}32$; $P = 1 - 0{,}6255 = 0{,}3745$.
d. $P(X \leq 199) \approx P(Y$. (Hay un 50 % de que sobre alguna plaza.)
e. Disminuiría: con 205 billetes la media sería $194{,}75$ y la probabilidad de superar 200 caería a unos pocos puntos porcentuales.

Solución del ejercicio 16

a. $z = \dfrac{1\,200 - 1\,500}{300} = -1$; $P = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$, el 15,87 %.
b. $z = \dfrac{2\,000 - 1\,500}{300} = 1{,}67$; $P = 1 - 0{,}9525 = 0{,}0475$; $600 \cdot 0{,}0475 = 28{,}5$: unos 28 o 29 empleados.
c. $x = 1\,500 - 0{,}67 \cdot 300 = 1\,299$ €.
d. Por simetría, $x = 1\,500 + 0{,}67 \cdot 300 = 1\,701$ €.
e. Sumando 100: $N(1\,600;\ 300)$, la media sube 100 y σ no cambia. Multiplicando por 1,1: $N(1\,650;\ 330)$, ambos se multiplican por 1,1.

Solución del ejercicio 17

a. Fórmula binomial con $p = 0{,}6$ y $q = 0{,}4$:
$P(X = 9) = \binom{15}{9} 0{,}6^9 \cdot 0{,}4^6 = 5\,005 \cdot 0{,}010078 \cdot 0{,}004096 \approx 0{,}2066$.
b. Hay que sumar los seis casos de 10 a 15:
$P(X \geq 10) = P(10) + \cdots + P(15) \approx 0{,}4032$.
c. Sumamos los casos de 0 a 5: $P(X \leq 5) \approx 0{,}0338$. Es muy improbable que lo usen 5 o menos.
d. $\mu = np = 15 \cdot 0{,}6 = 9$ y $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{15 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4} = \sqrt{3{,}6} \approx 1{,}897$.
e. Si se repitiera la elección de 15 jóvenes muchas veces, por término medio 9 de ellos usarían a diario el transporte público.

Solución del ejercicio 18

a. El dato es $P(X$. Tipificando, $P(Z$; como $1 - 0{,}1587 = 0{,}8413 = \Phi(1)$, por simetría $z = -1$.
b. Igualamos la tipificación de 40 a -1: $\dfrac{40 - \mu}{10} = -1$, luego $40 - \mu = -10$ y $\mu = 50$ min.
c. $z = \dfrac{65 - 50}{10} = 1{,}5$, así que $P(X > 65) = 1 - \Phi(1{,}5) = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$.
d. El 95 % central está entre $\mu - 1{,}96\sigma$ y $\mu + 1{,}96\sigma$: $50 \pm 1{,}96 \cdot 10$, es decir, entre $30{,}4$ y $69{,}6$ min.

e. Número esperado: $200 \cdot 0{,}0668 \approx 13$ vueltas de más de 65 minutos.

Solución del ejercicio 19

a. g: $-2, 0, 3, 10$ con p: $0{,}5;\ 0{,}3;\ 0{,}15;\ 0{,}05$. La suma es 1.
b. $E(G) = -2 \cdot 0{,}5 + 0 + 3 \cdot 0{,}15 + 10 \cdot 0{,}05 = -1 + 0{,}45 + 0{,}5 = -0{,}05$ €.
c. $\sum g^2 p = 4 \cdot 0{,}5 + 9 \cdot 0{,}15 + 100 \cdot 0{,}05 = 2 + 1{,}35 + 5 = 8{,}35$;
$\sigma^2 = 8{,}35 - 0{,}0025 = 8{,}3475$ y $\sigma \approx 2{,}889$ €.
d. $100 \cdot (-0{,}05) = -5$ €: se espera perder 5 € en total.
e. Por ejemplo, subir el premio mayor a 11 €: $E(G) = -1 + 0{,}45 + 11 \cdot 0{,}05 = 0$.
(Cualquier ajuste que anule la esperanza sirve.)

Solución del ejercicio 20

a. Dividimos la varianza entre la media: $\dfrac{npq}{np} = q = \dfrac{7{,}2}{12} = 0{,}6$. Entonces $p = 0{,}4$ y $n = \dfrac{12}{0{,}4} = 30$.
b. Si el área central es 0,95, en cada cola queda 0,025, así que $P(Z$ y la tabla da $k = 1{,}96$.
c. En una normal la media deja el 50 % a cada lado, luego $\mu = 10$. Como $P(Z > 1) = 0{,}1587$, el valor 14 está a una desviación de la media: $\dfrac{14 - 10}{\sigma} = 1$ y $\sigma = 4$.
d. Al menos una cara es el contrario de «ninguna»: $1 - 0{,}5^n > 0{,}99$ equivale a $0{,}5^n$. Con logaritmos, $n > \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}5} = 6{,}64$: hacen falta 7 lanzamientos.