Soluciones del examen - Derivadas

Curso: 2 Bachillerato Ccss · Duración: 90 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (4 puntos)

a. La derivada de $5x^2$ es $10x$ y, como $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, la de $-\frac{3}{x}$ es $\frac{3}{x^2}$: $f'(x) = 10x + \dfrac{3}{x^2}$. Conviene escribir antes $-\frac{3}{x} = -3x^{-1}$ y aplicar la regla de la potencia: $-3 \cdot (-1)x^{-2} = 3x^{-2}$. (0,75 puntos)

b. Regla del producto: $g'(x) = 2xe^x + (x^2+1)e^x = e^x(x^2+2x+1) = e^x(x+1)^2$. Sacar e^x factor común permite ver que $g'(x) \geq 0$ para todo x, porque $e^x > 0$ y $(x+1)^2 \geq 0$. (1 punto)

c. Regla de la cadena para el logaritmo, $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$: $h'(x) = \dfrac{3}{3x+1}$. Aquí $u = 3x+1$ y $u' = 3$; la derivada solo tiene sentido para $x > -\frac{1}{3}$, donde existe el logaritmo. (0,75 puntos)

d. Regla del cociente: $k'(x) = \dfrac{1 \cdot x^2 - (x+1) \cdot 2x}{x^4} = \dfrac{-x^2 - 2x}{x^4}$. Simplificando por x: $k'(x) = -\dfrac{x+2}{x^3}$. Error frecuente: olvidar el paréntesis en $(x+1) \cdot 2x$ y equivocarse con el signo del numerador. (1,5 puntos)

Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

a. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$. Sus ceros son $x = 1$ y $x = 3$. La factorización sale de las raíces de $x^2 - 4x + 3 = 0$, que son 1 y 3. (1 punto)

b. Estudiamos el signo de f' con valores de prueba ($x = 0$, $x = 2$, $x = 4$): $f' > 0$ en $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$, donde f crece, y f' en $(1, 3)$, donde decrece. (1,5 puntos)

c. En $x = 1$ pasa de crecer a decrecer: máximo relativo en $(1, 4)$, ya que $f(1) = 1 - 6 + 9 = 4$. En $x = 3$ pasa de decrecer a crecer: mínimo relativo en $(3, 0)$, ya que $f(3) = 27 - 54 + 27 = 0$. (1,5 puntos)

Solución del ejercicio 3 (3 puntos)

a. Regla del producto con $u = x^2$ y $v = e^x$: $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = e^x(x^2+2x)$. Sacar e^x factor común simplifica la evaluación del apartado siguiente. (1 punto)

b. Punto de tangencia: $f(1) = 1 \cdot e = e$. Pendiente: $f'(1) = e(1+2) = 3e$. La tangente es $y - f(1) = f'(1)(x-1)$, es decir, $y - e = 3e(x-1)$. Despejando, $y = 3ex - 2e$. Comprobación: en $x = 1$ da $y = e$, el punto de la curva. La pendiente $3e \approx 8{,}15$ es positiva, lo que indica que la función crece en $x = 1$; la

recta corta al eje Y en $(0, -2e)$.

Solución del ejercicio 4 (3 puntos)

a. Si un lado mide x, el otro debe medir $\frac{200}{x}$ para que el área sea 200 m^2. El perímetro es $P(x) = 2x + 2 \cdot \frac{200}{x} = 2x + \frac{400}{x}$, con $x > 0$. (1 punto)

b. $P'(x) = 2 - \frac{400}{x^2} = 0$ da $x^2 = 200$, $x = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$ (el valor negativo no vale). El signo de P' pasa de negativo a positivo: es un mínimo. (1,5 puntos)

c. El otro lado mide $\frac{200}{10\sqrt{2}} = 10\sqrt{2}$: el huerto es un cuadrado de lado $14{,}14$ m y se necesitan $4 \cdot 14{,}14 = 56{,}57$ m de valla. (0,5 puntos)

Solución del ejercicio 5 (6 puntos)

a. El beneficio marginal es la derivada: $B'(x) = -4x + 120$. (1 punto)

b. Resolvemos $B'(x) = 0$: $x = 30$ bicicletas. Como $B''(x) = -4$ (o porque B' pasa de positivo a negativo), es un máximo. (2 puntos)

c. $B(30) = -2 \cdot 900 + 3\,600 - 1\,000 = 800$ €. (1 punto)

d. $B(x) = 0$ equivale a $x^2 - 60x + 500 = 0$, con soluciones $x = 10$ y $x = 50$. Al ser una parábola hacia abajo, hay beneficio si 10. (1,5 puntos)

e. $B'(40) = -40$: con 40 bicicletas, vender la número 41 reduce el beneficio en unos 40 €. (0,5 puntos)