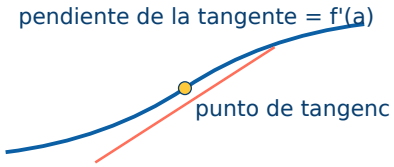
Apuntes - Derivadas

Curso: 2 Bachillerato Ccss

La derivada mide la rapidez con que cambia una magnitud. Sirve para hallar rectas tangentes, estudiar el crecimiento de una función y resolver problemas de optimización: máximo beneficio, mínimo coste, mayor área.

Actividad de introducción: la velocidad del autobús

Un autobús sale de Madrid hacia Zaragoza. A las 10:00 h el cuentakilómetros marca el kilómetro 0 y a las 12:00 h el kilómetro 200. La **velocidad media** es de 100 km/h, pero el conductor no ha ido siempre a 100: en algunos tramos ha ido a 120 km/h y en otros ha frenado por una obra. El velocímetro marca la velocidad **instantánea**, es decir, lo deprisa que cambia la posición en un instante. Calcularla consiste en medir la velocidad media en intervalos cada vez más cortos. La derivada es justamente eso: la versión matemática de la velocidad instantánea, y se aplica igual a una función de costes, de ingresos o de población. En esta unidad aprenderás a calcularla con reglas, a utilizarla para dibujar tangentes y a resolver los problemas de optimización típicos de la prueba de acceso a la universidad: máximo beneficio, mínimo coste y mayor superficie.



La derivada como tasa de variación

Definición: tasa de variación media

La **tasa de variación media** de f en $[a, b]$ es $\mathrm{TVM} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$: cuánto cambia f, por término medio, por cada unidad de x.

Definición: derivada

La **derivada** de f en a es $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$. Es la tasa de variación instantánea y la pendiente de la recta tangente en $(a, f(a))$. Si $C(x)$ es el coste de producir x unidades, $C'(x)$ es el **coste marginal**.

Cálculo de derivadas

Regla: tabla de derivadas

$(k)' = 0$; $(x^n)' = nx^{n-1}$; $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$; $(e^x)' = e^x$; $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Regla: operaciones

Suma: $(f \pm g)' = f' \pm g'$. Producto: $(fg)' = f'g + fg'$. Cociente: $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

Cadena: $(f \circ g)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$; por ejemplo $(e^{x^2})' = 2xe^{x^2}$ y $(\ln(x^2+1))' = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

Ejemplo 1

Deriva $f(x) = x^2 e^x$.

Producto: $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = e^x(x^2 + 2x)$.

Ejemplo 2

Deriva $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$.

Cociente: $f'(x) = \dfrac{2(x-3) - (2x+1)}{(x-3)^2} = \dfrac{-7}{(x-3)^2}$.

¡Atención!

La derivada de un producto no es el producto de las derivadas, y la de e^{x^2} no es e^{x^2}: falta multiplicar por $2x$ (regla de la cadena).

Recta tangente

Regla: recta tangente

La recta tangente a $y = f(x)$ en $x = a$ es $y - f(a) = f'(a)\,(x - a)$.

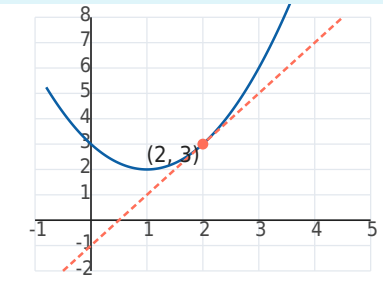
Método: hallar la tangente

1. Calcula $f(a)$.
2. Deriva y calcula $f'(a)$.
3. Sustituye en $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ y simplifica.

Ejemplo 3

Tangente a $f(x) = x^2 - 2x + 3$ en $x = 2$.

$f(2) = 3$, $f'(x) = 2x - 2$, $f'(2) = 2$. Tangente: $y - 3 = 2(x - 2)$, es decir $y = 2x - 1$.



Crecimiento y extremos

Propiedad: monotonía

Si $f' > 0$ en un intervalo, f es creciente; si f', decreciente. Los candidatos a extremo son los puntos con $f'(x) = 0$. Si f' pasa de $+$ a $-$ hay un máximo relativo; de $-$ a $+$, un mínimo relativo. Con la segunda derivada: $f''(a)$ máximo, $f''(a) > 0$ mínimo.

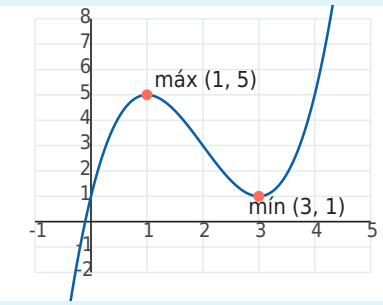
Método: estudiar monotonía y extremos

1. Calcula $f'(x)$ y resuelve $f'(x) = 0$.
2. Estudia el signo de f' en los intervalos que quedan.
3. Concluye dónde crece, dónde decrece y qué extremos hay.
4. Calcula el valor de f en cada extremo.

Ejemplo 4

Estudia $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3)$. Crece en $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ y decrece en $(1, 3)$. Máximo relativo en $(1, 5)$ y mínimo relativo en $(3, 1)$.



Observación

La segunda derivada informa de la curvatura: $f'' > 0$ convexa (∪), f'' cóncava (∩). En $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, $f'' = 6x - 12$: $f''(1) = -6$ (máximo) y $f''(3) = 6 > 0$ (mínimo).

Problemas de optimización

Método: optimizar

1. Escribe la magnitud que se optimiza como función de una variable.
2. Deriva e iguala a cero.
3. Comprueba si es máximo o mínimo con f'' o con el signo de f'.
4. Calcula el valor óptimo y responde con unidades.

Ejemplo 5

El beneficio (miles de euros) con x centenares de unidades es $B(x) = -x^2 + 60x - 500$. ¿Cuándo es máximo?

$B'(x) = -2x + 60 = 0 \Rightarrow x = 30$. $B'' = -2$: máximo.
$B(30) = -900 + 1800 - 500 = 400$. Beneficio máximo: 400 000 € con 3000 unidades.

Ejemplo 6

Si $C(x) = x^2 + 100x + 3600$, halla la producción de coste medio mínimo.

$\bar{C}(x) = x + 100 + \dfrac{3600}{x}$, $\bar{C}'(x) = 1 - \dfrac{3600}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 60$, con $\bar{C}(60) = 220$ € por unidad.

Ejemplo 7

El coste es $C(x) = 0{,}01x^2 + 5x + 200$. Calcula el coste marginal en $x = 100$.

$C'(x) = 0{,}02x + 5$, luego $C'(100) = 7$: la unidad 101 cuesta aproximadamente 7 €. El coste medio es $\frac{800}{100} = 8$ €.

Ejemplo 8

Deriva $f(x) = (3x^2 - 1)^5$ y $g(x) = \ln(x^2 + 1)$.

Cadena: $f'(x) = 5(3x^2 - 1)^4 \cdot 6x = 30x(3x^2 - 1)^4$. Para g:
$g'(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$.

Ejemplo 9

Con 40 m de valla se cerca un huerto rectangular. ¿Qué dimensiones dan el área máxima?

Base x y altura $20 - x$. $A(x) = 20x - x^2$, $A'(x) = 20 - 2x = 0 \Rightarrow x = 10$, y $A'' = -2$ confirma el máximo. Es un cuadrado de 10×10 m con área máxima de 100 m².

Ejemplo 10

La demanda es $p = 100 - 2x$ euros cuando se venden x unidades. Halla las unidades que maximizan el ingreso $I(x) = xp$.

$I(x) = 100x - 2x^2$, $I'(x) = 100 - 4x = 0 \Rightarrow x = 25$. $I'' = -4$: máximo.
$I(25) = 25 \cdot 50 = 1250$ €.

Observación

Un problema de optimización sin restricciones se resuelve igual siempre: función de una variable, derivada igual a cero y clasificación del punto crítico. El resultado es un valor de la variable (cuántas unidades) y un valor de la función (cuánto beneficio, coste o área); da ambos.

Ejemplo 11

Una población (en cientos) sigue $P(t) = 200 + 12t - t^2$, con t en años. Calcula la velocidad de crecimiento a los 3 años y el momento de población máxima.

$P'(t) = 12 - 2t$. $P'(3) = 6$: crece 6 cientos de habitantes por año. $P'(t) = 0 \Rightarrow t = 6$ y $P'' = -2$: máximo. $P(6) = 200 + 72 - 36 = 236$ cientos.

Ejemplo 12

Halla los puntos de $f(x) = x^3 - 3x$ con tangente horizontal.

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$. $f(1) = -2$ y $f(-1) = 2$. Los puntos son $(1, -2)$ y $(-1, 2)$.

Observación

En la PAU de Ciencias Sociales se piden derivadas con producto, cociente y cadena, rectas tangentes, monotonía y extremos, y un problema de optimización con contexto económico. Comprueba que el punto crítico pertenece al dominio.

Interpretar la derivada en economía

Propiedad: magnitudes marginales

En un contexto económico, la derivada de una función de costes, ingresos o beneficios recibe el nombre de **magnitud marginal**. Si $C(x)$ es el coste de producir x unidades, el coste marginal $C'(x)$ se interpreta como el coste aproximado de fabricar una unidad más. Lo mismo vale para el ingreso marginal $I'(x)$ y el beneficio marginal $B'(x) = I'(x) - C'(x)$. Mientras el beneficio marginal sea positivo, conviene seguir produciendo; cuando se anula, se alcanza un posible máximo del beneficio.

Ejemplo 13

El coste de producir x pizzas en una pizzería es $C(x) = 0{,}02x^2 + 3x + 50$ euros. Calcula el coste marginal en $x = 100$ e interprétalo.

Derivamos: $C'(x) = 0{,}04x + 3$. Entonces $C'(100) = 4 + 3 = 7$. Interpretación: cuando ya se han fabricado 100 pizzas, la pizza número 101 cuesta aproximadamente 7 € más. Fíjate en que el coste fijo de 50 € desaparece al derivar, porque no depende de la cantidad producida.

Cómo se razona en un problema de optimización

Método: redactar la solución de un problema de optimización

1. Identifica la magnitud que hay que hacer máxima o mínima y escribe su fórmula con dos variables.
2. Usa la condición del enunciado (perímetro fijo, longitud de valla, volumen dado) para eliminar una variable y quedarte con una función $f(x)$ de una sola variable.
3. Indica el dominio de x según el contexto: longitudes positivas, unidades no negativas.
4. Calcula $f'(x)$ y resuelve $f'(x) = 0$.
5. Comprueba que el punto crítico es del tipo buscado, con el signo de f' o con la segunda derivada.
6. Calcula el valor de la función en ese punto y responde con una frase completa y con unidades.

Observación: la segunda derivada

Para decidir si un punto crítico es máximo o mínimo se puede usar la segunda derivada. Si $f'(a) = 0$ y $f''(a)$, la gráfica es cóncava hacia abajo y hay un **máximo relativo**. Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$, hay un **mínimo relativo**. En la prueba de acceso se acepta cualquiera de los dos criterios, siempre que se justifique con claridad. El estudio del signo de la primera derivada tiene la ventaja de servir también cuando la segunda derivada es complicada de calcular o se anula en el punto.

Ejemplo 14

Entre todos los rectángulos de perímetro 40 m, halla el de mayor área.

Si un lado mide x, el otro mide $20 - x$ y el área es $A(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$ con 0. Derivamos: $A'(x) = 20 - 2x = 0$ da $x = 10$. Como $A''(x) = -2$, es un máximo. El rectángulo es un cuadrado de 10×10 m y su área es de 100 m^2.

¡Atención!

No olvides comprobar el dominio. Una solución de $f'(x) = 0$ que sea negativa, o mayor que el máximo posible, no sirve en un problema de longitudes. Tampoco confundas el **valor de** x en el que se alcanza el máximo con el **valor máximo** de la función: la pregunta puede pedir uno, el otro o ambos.

Ejemplo 15

El beneficio de una empresa es $B(x) = -x^2 + 10x - 16$ miles de euros, donde x son las unidades vendidas en miles. Halla cuándo es máximo y cuánto vale.

Derivamos: $B'(x) = -2x + 10$, que se anula en $x = 5$. Como $B''(x) = -2$, es un máximo. El beneficio máximo es $B(5) = -25 + 50 - 16 = 9$ miles de euros, es decir, 9 000 €, y se consigue vendiendo 5 000 unidades. Observa que la respuesta incluye la cantidad, el beneficio y las unidades.

Observación: de la gráfica a la derivada

Una buena forma de comprobar un resultado es mirar la gráfica. Donde la curva sube, las tangentes tienen pendiente positiva y la derivada es positiva; donde baja, la derivada es negativa; en la cima de una colina y en el fondo de un valle la tangente es horizontal y la derivada vale cero. Si al resolver obtienes un máximo donde la gráfica claramente tiene un valle, revisa el signo de la segunda derivada o los cálculos del signo de la primera.

¿Sabías que?

La derivada nació en el siglo XVII a partir de dos problemas: hallar la tangente a una curva y calcular velocidades. Isaac Newton la llamó «fluxión» y Gottfried Leibniz le dio la notación $\frac{dy}{dx}$ que aún se utiliza. Hoy las empresas la emplean cada día: cada vez que una compañía decide cuántas unidades fabricar o a qué precio vender para maximizar su beneficio, está resolviendo un problema de derivadas.

El consejo de Otto

Antes de derivar, reescribe: $\sqrt{x} = x^{1/2}$ y $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$. En los problemas, termina siempre con una frase que diga qué cantidad es óptima y cuánto vale.