Ejercicios - Derivadas

Curso: 2 Bachillerato Ccss · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Tasa de variación media

Dada la función $f(x) = x^2 - 3x$, se estudia cómo cambia entre dos valores de x.

a. Calcula la tasa de variación media en el intervalo $[1, 4]$.
b. Calcula la tasa de variación media en $[1, 2]$.
c. Interpreta el signo de cada resultado.

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Derivadas inmediatas

Deriva aplicando la tabla de derivadas y las propiedades de la suma.

a. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 2$
b. $g(x) = 5x^2 - \dfrac{3}{x}$
c. $h(x) = \sqrt{x} + \ln x$
d. $k(x) = 3e^x - 2x$

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Producto, cociente y cadena

Deriva y simplifica, indicando la regla utilizada en cada caso.

a. $f(x) = x^2 e^x$
b. $g(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 3}$
c. $h(x) = e^{x^2}$
d. $k(x) = \ln(3x + 1)$

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Recta tangente

Sea $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

a. Calcula $f(2)$ y $f'(2)$.
b. Escribe la ecuación de la recta tangente en $x = 2$.

c. ¿En qué punto la tangente es horizontal?

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Monotonía y extremos

Estudia la función $f(x) = x^3 - 3x$.

a. Calcula $f'(x)$ y resuelve $f'(x) = 0$.
b. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
c. Halla los máximos y mínimos relativos.

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Extremos con exponencial

Estudia $f(x) = x^2 e^{-x}$ para $x \geq 0$.

a. Calcula $f'(x)$ y factoriza.
b. Halla los puntos críticos.
c. Clasifícalos con el signo de f'.

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – El coste marginal de un taller

Un taller de cerámica de Talavera de la Reina produce x jarrones al día con un coste total en euros $C(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}6x^2 + 20x + 100$.

a. Calcula el coste de producir 20 jarrones.
b. Calcula el coste marginal $C'(x)$ y evalúalo en $x = 20$.
c. Interpreta el resultado.
d. Compara $C(21) - C(20)$ con $C'(20)$.

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – Ingresos de una tienda

Una tienda de camisetas de equipos de fútbol vende x camisetas a la semana y obtiene unos ingresos $I(x) = 60x - 0{,}5x^2$ euros, con $0 \leq x \leq 120$.

a. Calcula el ingreso marginal $I'(x)$.
b. ¿Cuántas camisetas hay que vender para ingresar lo máximo?
c. ¿Cuál es el ingreso máximo?
d. ¿Qué ocurre con el ingreso si se venden 100 camisetas?

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – Tangente a un logaritmo

Considera la función $f(x) = \ln x$.

a. Halla la ecuación de la recta tangente en $x = 1$.
b. Halla la tangente en $x = e$.
c. Usa la primera tangente para estimar $\ln 1{,}1$ y compara con el valor real $0{,}0953$.

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – Tangente horizontal y paralela

La función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ describe el nivel de agua (en metros) de un pequeño embalse durante x meses.

a. Calcula $f'(x)$.
b. ¿En qué meses el nivel deja de subir o bajar (tangente horizontal)?
c. Indica el nivel en esos meses.
d. ¿En qué punto la tangente es paralela a la recta $y = -3x$?

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – El corral de la granjera

Una granjera de Segovia dispone de 100 m de valla para cercar un corral rectangular que apoya uno de sus lados en el muro de un establo (ese lado no necesita valla).

a. Si los lados perpendiculares al muro miden x, expresa el lado paralelo en función de x.
b. Escribe el área $A(x)$.
c. Halla x para que el área sea máxima.
d. Calcula las dimensiones y el área máxima.

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – La caja sin tapa

Con una cartulina cuadrada de 12 cm de lado se hace una caja sin tapa recortando un cuadrado de lado x en cada esquina y doblando los bordes.

a. Escribe el volumen $V(x)$ y el dominio de x.
b. Calcula $V'(x)$ y los puntos críticos.
c. Elige el valor que da el volumen máximo.
d. Calcula el volumen máximo.

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – Beneficio de una pastelería

Una pastelería de Sevilla fabrica x docenas de pestiños al día. Su beneficio diario, en euros, es $B(x) = -x^2 + 70x - 600$.

a. ¿Cuántas docenas hay que fabricar para maximizar el beneficio?
b. ¿Cuál es ese beneficio máximo?
c. ¿Entre qué valores de x hay beneficios positivos?
d. ¿Cuánto vale el beneficio marginal en $x = 50$ y qué indica?

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – Concentración de un medicamento

La concentración de un fármaco en sangre (mg/l) a las t horas de tomarlo es $c(t) = \dfrac{100t}{t^2 + 16}$, con $t \geq 0$.

a. Calcula $c'(t)$.
b. ¿En qué instante la concentración es máxima?
c. ¿Cuál es la concentración máxima?
d. ¿Hacia qué valor tiende la concentración con el paso del tiempo?

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – Problema: el coste medio mínimo

Una fábrica de bicicletas de Eibar produce x bicicletas al mes. El coste total mensual, en euros, es $C(x) = x^2 + 100x + 2\,500$ y el coste medio por bicicleta es .

a. Escribe y calcula el coste medio de producir 25 bicicletas.
b. Calcula .
c. ¿Cuántas bicicletas hay que fabricar para minimizar el coste medio?
d. ¿Cuál es ese coste medio mínimo?
e. Comprueba que en ese punto el coste medio coincide con el coste marginal $C'(x)$.

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – Problema: las ventas de un videojuego

Las ventas acumuladas de un videojuego, en miles de unidades, durante sus primeros 8 meses siguen $V(t) = -t^3 + 12t^2$ (con t en meses, $0 \leq t \leq 8$).

a. Calcula la velocidad de ventas $V'(t)$ (miles de unidades al mes).

b. ¿En qué mes es máxima la velocidad de ventas y cuánto vale?
c. Estudia el crecimiento de V en $[0, 8]$.
d. ¿Cuántas unidades se han vendido a los 8 meses?
e. Explica por qué el modelo no sirve para $t > 8$.

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – Problema: el precio de las entradas

En un cine de Valencia, con el precio de 10 € se venden 300 entradas por sesión; por cada euro que se sube el precio se venden 20 entradas menos (y por cada euro que se baja, 20 más). Sea x el número de euros de variación del precio (positivo si sube).

a. Escribe el precio y el número de entradas en función de x.
b. Escribe el ingreso $I(x)$.
c. Calcula x para que el ingreso sea máximo.
d. Indica el precio, las entradas y el ingreso máximos.
e. Si la sala tiene un aforo de 340 personas, ¿cambia la respuesta?

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Problema: temperatura de una sala

La temperatura de una sala (en °C) tras encender la calefacción es $T(t) = 20 - 12e^{-0{,}25t}$ con t en horas.

a. Calcula la temperatura inicial y a las 4 horas (tres decimales).
b. Calcula $T'(t)$ y la velocidad de calentamiento en $t = 0$ y en $t = 4$.
c. Escribe la tangente en $t = 0$.
d. ¿Hacia qué temperatura tiende la sala?
e. Explica por qué T siempre crece.

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Problema: calcular una parábola

El arco de un pequeño puente tiene forma de parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$. Se sabe que pasa por el punto $(0, 3)$ y que su punto más bajo es $(1, 1)$.

a. Usa $f(0) = 3$ para hallar c.
b. Usa que en el mínimo $f'(1) = 0$ para obtener una ecuación.
c. Usa $f(1) = 1$ para obtener otra.
d. Resuelve y escribe $f(x)$.
e. Comprueba que $a > 0$ y calcula $f(2)$.

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: derivadas y razonamiento

Resuelve estos retos de derivadas.

a. Halla a para que la recta tangente a $f(x) = x^2 + ax$ en $x = 1$ tenga pendiente 5.
b. Estudia el máximo de $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ para $x > 0$.
c. Demuestra que $f(x) = x^3 + x$ no tiene extremos relativos.
d. La suma de dos números positivos es 20. ¿Cuál es el máximo de su producto?