Soluciones - Derivadas

Curso: 2 Bachillerato Ccss

Solución del ejercicio 1

a. Calculamos los valores extremos: $f(1) = 1 - 3 = -2$ y $f(4) = 16 - 12 = 4$. La tasa de variación media es $\text{TVM} = \dfrac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \dfrac{4 - (-2)}{3} = \dfrac{6}{3} = 2$.

b. $f(2) = 4 - 6 = -2$, así que $\text{TVM} = \dfrac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \dfrac{-2 - (-2)}{1} = 0$.

c. En $[1, 4]$ la TVM es positiva: la función crece, por término medio, 2 unidades por cada unidad de x. En $[1, 2]$ es nula: no hay variación neta porque $f(1) = f(2)$; la función baja y vuelve a subir, ya que el mínimo de la parábola, en $x = 1{,}5$, está entre ambos puntos.

Solución del ejercicio 2

a. Derivamos cada sumando con la regla de la potencia $(x^n)' = nx^{n-1}$; la constante tiene derivada 0: $f'(x) = 3x^2 - 8x + 7$.

b. La derivada de $5x^2$ es $10x$. Como $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$, la de $-\dfrac{3}{x}$ es $+\dfrac{3}{x^2}$. Por tanto, $g'(x) = 10x + \dfrac{3}{x^2}$.

c. Usamos $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ y $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$: $h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x}$, definida para $x > 0$.

d. La exponencial e^x es su propia derivada y la de $-2x$ es -2: $k'(x) = 3e^x - 2$.

Solución del ejercicio 3

a. Regla del producto $(uv)' = u'v + uv'$ con $u = x^2$ y $v = e^x$: $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x$. Sacando factor común, $f'(x) = e^x(x^2 + 2x)$.

b. Regla del cociente $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$:

$$g'(x) = \frac{2(x-3) - (2x+1)\cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{2x - 6 - 2x - 1}{(x-3)^2} = \frac{-7}{(x-3)^2}.$$

c. Regla de la cadena: la derivada de e^u es $e^u \cdot u'$, con $u = x^2$ y $u' = 2x$. Así $h'(x) = 2x\, e^{x^2}$.

d. Regla de la cadena para el logaritmo, $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, con $u = 3x + 1$:

$$k'(x) = \frac{3}{3x + 1}.$$

Solución del ejercicio 4

a. Sustituimos: $f(2) = 4 - 4 + 3 = 3$. Derivamos, $f'(x) = 2x - 2$, y evaluamos: $f'(2) = 2$.
b. La recta tangente en $x = a$ es $y - f(a) = f'(a)(x - a)$. Con $a = 2$: $y - 3 = 2(x - 2)$, es decir, $y = 2x - 1$.
c. La tangente es horizontal cuando su pendiente vale 0: $f'(x) = 2x - 2 = 0$ da $x = 1$. Como $f(1) = 1 - 2 + 3 = 2$, el punto es $(1, 2)$, que es precisamente el vértice (mínimo) de la parábola.

Solución del ejercicio 5

a. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$. Igualando a cero se obtienen los puntos críticos $x = -1$ y $x = 1$.
b. Estudiamos el signo de f' en cada intervalo (por ejemplo, con $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$): $f' > 0$ en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, donde f crece, y f' en $(-1, 1)$, donde decrece.
c. En $x = -1$ la función pasa de crecer a decrecer: máximo relativo en $(-1, 2)$, porque $f(-1) = -1 + 3 = 2$. En $x = 1$ pasa de decrecer a crecer: mínimo relativo en $(1, -2)$, porque $f(1) = 1 - 3 = -2$.

Solución del ejercicio 6

a. Aplicamos la regla del producto y la de la cadena, sabiendo que $(e^{-x})' = -e^{-x}$: $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = xe^{-x}(2 - x)$.
b. Un producto es cero si lo es algún factor. Como la exponencial nunca se anula, $f'(x) = 0$ solo en $x = 0$ y $x = 2$.
c. El factor e^{-x} es positivo, así que el signo lo dan x y $2 - x$. En $(0, 2)$ $f' > 0$ y la función crece; en $(2, \infty)$ f' y decrece. Hay un mínimo en $x = 0$, con $f(0) = 0$, y un máximo en $x = 2$, con $f(2) = 4e^{-2} \approx 0{,}54$.

Solución del ejercicio 7

a. Sustituimos $x = 20$: $C(20) = 0{,}01 \cdot 8\,000 - 0{,}6 \cdot 400 + 400 + 100 = 80 - 240 + 400 + 100 = 340$ €.
b. El coste marginal es la derivada del coste: $C'(x) = 0{,}03x^2 - 1{,}2x + 20$. En $x = 20$: $C'(20) = 12 - 24 + 20 = 8$ € por jarrón.
c. Cuando ya se fabrican 20 jarrones, producir el jarrón número 21 cuesta aproximadamente 8 € más.
d. $C(21) = 92{,}61 - 264{,}6 + 420 + 100 = 348{,}01$ €, así que el coste real del jarrón 21 es $C(21) - C(20) = 8{,}01$ €, prácticamente igual al coste marginal $C'(20) = 8$ €.

Solución del ejercicio 8

a. El ingreso marginal es la derivada del ingreso: $I'(x) = 60 - x$.
b. Resolvemos $I'(x) = 0$: $x = 60$ camisetas. Para $x < 60$ $I' > 0$ y el ingreso crece; para $x > 60$ I' y decrece. Es un máximo.
c. $I(60) = 60 \cdot 60 - 0{,}5 \cdot 3\,600 = 3\,600 - 1\,800 = 1\,800$ €. Es el ingreso máximo semanal.
d. $I(100) = 6\,000 - 5\,000 = 1\,000$ €, mucho menos que el máximo. Vender más camisetas no siempre aumenta los ingresos, porque para venderlas hay que bajar el precio.

Solución del ejercicio 9

a. Punto: $f(1) = \ln 1 = 0$. Pendiente: $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, luego $f'(1) = 1$. La tangente es $y - 0 = 1 \cdot (x - 1)$, es decir, $y = x - 1$.
b. $f(e) = \ln e = 1$ y $f'(e) = \dfrac{1}{e}$. Entonces $y - 1 = \dfrac{1}{e}(x - e)$, que simplificada da $y = \dfrac{x}{e}$: una recta que pasa por el origen.
c. Cerca de $x = 1$ la tangente se parece mucho a la curva, así que $\ln 1{,}1 \approx 1{,}1 - 1 = 0{,}1$. El valor real es $0{,}0953$: el error es de unas $0{,}005$ unidades. La tangente da una buena aproximación cerca del punto de tangencia.

Solución del ejercicio 10

a. Derivamos término a término: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.
b. El nivel deja de subir o bajar donde la tangente es horizontal, $f'(x) = 0$: $3x^2 - 12x + 9 = 0$, y dividiendo entre 3, $x^2 - 4x + 3 = 0$. Las soluciones son $x = 1$ y $x = 3$ meses.
c. $f(1) = 1 - 6 + 9 + 1 = 5$ m (máximo relativo) y $f(3) = 27 - 54 + 27 + 1 = 1$ m (mínimo relativo).
d. Rectas paralelas tienen la misma pendiente, así que pedimos $f'(x) = -3$: $3x^2 - 12x + 12 = 0$, es decir, $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 = 0$, con $x = 2$ (raíz doble). Como $f(2) = 8 - 24 + 18 + 1 = 3$, el punto es $(2, 3)$.

Solución del ejercicio 11

a. Los dos lados perpendiculares al muro gastan $2x$ metros de valla; el resto, $100 - 2x$, es el lado paralelo al muro.
b. El área es base por altura: $A(x) = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$, con $0 < x < 50$.
c. Derivamos e igualamos a cero: $A'(x) = 100 - 4x = 0$, luego $x = 25$. Como $A''(x) = -4$, se trata de un máximo.

d. Los lados perpendiculares miden 25 m y el paralelo $100 - 50 = 50$ m. El área máxima es $A = 25 \cdot 50 = 1\,250$ m^2.

Solución del ejercicio 12

a. Al recortar x en cada esquina, la base es un cuadrado de lado $12 - 2x$ y la altura es x. Entonces $V(x) = x(12 - 2x)^2$, con 0 para que existan la base y la altura.
b. Producto y cadena:
$V'(x) = (12 - 2x)^2 + x \cdot 2(12 - 2x)(-2) = (12 - 2x)^2 - 4x(12 - 2x) = (12 - 2x)(12 - 6x)$
, que se anula en $x = 6$ y $x = 2$.
c. $x = 6$ no está en el dominio. Para $x = 2$, $V' > 0$ antes y V' después, así que es un máximo.
d. $V(2) = 2 \cdot (12 - 4)^2 = 2 \cdot 64 = 128$ cm^3. La caja de mayor volumen mide $8 \times 8 \times 2$ cm.

Solución del ejercicio 13

a. Derivamos el beneficio e igualamos a cero: $B'(x) = -2x + 70 = 0$, luego $x = 35$ docenas. Como $B''(x) = -2 < 0$, es un máximo.
b. $B(35) = -1\,225 + 2\,450 - 600 = 625$ €. Es el beneficio máximo diario.
c. Buscamos dónde $B(x) = 0$: $x^2 - 70x + 600 = 0$, con soluciones $x = 10$ y $x = 60$. Al ser una parábola hacia abajo, hay beneficio positivo entre las raíces: si 10.
d. $B'(50) = -100 + 70 = -30$. Es negativo: con 50 docenas, fabricar la docena número 51 reduce el beneficio en unos 30 €.

Solución del ejercicio 14

a. Regla del cociente: $c'(t) = \dfrac{100(t^2 + 16) - 100t \cdot 2t}{(t^2 + 16)^2} = \dfrac{100(16 - t^2)}{(t^2 + 16)^2}$.
b. El denominador es positivo, así que $c'(t) = 0$ cuando $16 - t^2 = 0$, es decir, $t = 4$ h (la raíz negativa no tiene sentido). $c' > 0$ antes y c' después: la concentración sube hasta $t = 4$ y luego baja.
c. $c(4) = \dfrac{100 \cdot 4}{16 + 16} = \dfrac{400}{32} = 12{,}5$ mg/l es la concentración máxima.
d. El grado del denominador es mayor que el del numerador, así que $\lim_{t \to \infty} c(t) = 0$: con el tiempo el fármaco se elimina de la sangre.

Solución del ejercicio 15

a. ; € por bicicleta.

b. .

c. da $x^2 = 2\,500$, $x = 50$ (solo la raíz positiva). El signo pasa de negativo a positivo: mínimo.

d. €.

e. $C'(x) = 2x + 100$, $C'(50) = 200$ €, igual que el coste medio mínimo (ocurre siempre en el mínimo del coste medio).

Solución del ejercicio 16

a. $V'(t) = -3t^2 + 24t$.

b. $V''(t) = -6t + 24 = 0$ da $t = 4$; la velocidad máxima es $V'(4) = -48 + 96 = 48$ mil unidades al mes.

c. $V' = 0$ en $t = 0$ y $t = 8$; $V' > 0$ en $(0, 8)$: V es creciente en todo el intervalo.

d. $V(8) = -512 + 768 = 256$ mil unidades.

e. Para $t > 8$, V' y las ventas acumuladas disminuirían, algo imposible: unas ventas acumuladas nunca decrecen.

Solución del ejercicio 17

a. Precio: $10 + x$; entradas: $300 - 20x$.

b. $I(x) = (10 + x)(300 - 20x) = 3\,000 + 100x - 20x^2$.

c. $I'(x) = 100 - 40x = 0$, $x = 2{,}5$; como $I'' = -40$, es máximo.

d. Precio $12{,}50$ €; entradas $300 - 50 = 250$; $I = 12{,}5 \cdot 250 = 3\,125$ €.

e. No: con 250 entradas no se supera el aforo de 340. (Bajar a 8 € llenaría la sala con 340 entradas, pero daría solo $8 \cdot 340 = 2\,720$ €.)

Solución del ejercicio 18

a. $T(0) = 20 - 12e^0 = 20 - 12 = 8$ °C. $T(4) = 20 - 12e^{-1} \approx 20 - 4{,}415 = 15{,}585$ °C.

b. Por la regla de la cadena, $T'(t) = -12 \cdot (-0{,}25)e^{-0{,}25t} = 3e^{-0{,}25t}$. Así $T'(0) = 3$ °C/h y $T'(4) = 3e^{-1} \approx 1{,}104$ °C/h: al principio la sala se calienta más deprisa.

c. La tangente en $t = 0$ pasa por $(0, 8)$ con pendiente 3: $y - 8 = 3t$, es decir, $y = 3t + 8$.

d. Cuando $t \to \infty$, $e^{-0{,}25t} \to 0$, luego $T \to 20$ °C: la sala se acerca a 20 °C sin llegar a superarlos.

e. $T'(t) = 3e^{-0{,}25t} > 0$ para todo t, porque la exponencial es siempre positiva: T es creciente, aunque cada vez más despacio.

Solución del ejercicio 19

a. Sustituyendo $x = 0$ en $f(x) = ax^2 + bx + c$ se obtiene $f(0) = c = 3$.
b. En el punto más bajo la tangente es horizontal. Como $f'(x) = 2ax + b$, la condición $f'(1) = 0$ da $2a + b = 0$.
c. El punto $(1, 1)$ está en la gráfica: $f(1) = a + b + 3 = 1$, es decir, $a + b = -2$.
d. De la segunda ecuación, $b = -2a$. Sustituyendo en la tercera: $a - 2a = -2$, luego $a = 2$ y $b = -4$. La parábola es $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$.
e. $a = 2 > 0$: la parábola se abre hacia arriba y el vértice es un mínimo, como debía ser. $f(2) = 8 - 8 + 3 = 3$, el punto simétrico de $(0, 3)$ respecto del eje $x = 1$.

Solución del ejercicio 20

a. $f'(x) = 2x + a$. La pendiente de la tangente en $x = 1$ es $f'(1) = 2 + a$; igualando a 5, $a = 3$.
b. Regla del cociente: $g'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$. Se anula si $\ln x = 1$, es decir, $x = e$. $g' > 0$ antes y g' después: máximo en $\left(e, \dfrac{1}{e}\right)$.
c. $f'(x) = 3x^2 + 1 \geq 1 > 0$ para todo x: la derivada nunca se anula ni cambia de signo, así que la función es siempre creciente y no tiene extremos relativos.
d. Sean x y $20 - x$ los números. Su producto es $P(x) = 20x - x^2$; $P'(x) = 20 - 2x = 0$ da $x = 10$, y $P'' = -2 < 0$. El producto máximo es $10 \cdot 10 = 100$.